Rappel d'arithmétique

1. Divisibilité & Nombres premiers

Un entier est dit divisible par un autre quand le résultat de la division est un entier.

Exemples 1

10 est divisible par 2, puisque 10/2 = 5 est entier.
12 n'est pas divisible par 5, puisque 12/5 = 2.4 n'est pas entier.

Quelques critères de divisibilité

Un entier est divisible

- par 2 si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8
- par 5 si son dernier chiffre est 0 ou 5
- par 3 si la somme itérée de ses chiffres est divisible par 3

Exemple 2

7'354'782 → 7 + 3 + 5 + 4 + 7 + 8 + 2 = 36 → 3 + 6 = 9 divisible par 3

La division donne : 7'354'782/3 = 2'451'594

Nombre premier

Un nombre premier est un entier plus grand 1, divisible uniquement par 1 et par lui-même.

Les premiers nombres premiers sont : 2 3 5 7 11 13 17 19

Décomposition d'un entier en un produit de nombres premiers

Cette décomposition peut se faire au moyen de divisions successives par les premiers nombres premiers (de préférence dans l'ordre).

Exemple 3

1092	2
546	2
273	3
91	7
13	13
1	

La décomposition se termine quand on obtient 1 à gauche

Nous pouvons alors écrire :

1092 = 2•2•3•7•13

Exercice 1

Décomposer en un produit de premiers.

84 48 117 1540 150

2. Fractions

Une fraction exprime le rapport d'une partie au tout.

Exemple 4

La partie grisée contient deux rectangles identiques.
Le tout contient cinq rectangles identiques.

La fraction $\frac{2}{5}$ exprime ce rapport.

Le terme du haut s'appelle le numérateur, celui du bas le dénominateur.

La fraction donne un nombre décimal quand on effectue la division : $\frac{2}{5}=0.4$

Réciproquement, un nombre décimal à développement fini ou périodique peut être transformé en fraction.

Exemples 5

$0.3=\frac{3}{10}$ $\quad 0.41=\frac{41}{100}$ $\quad 2.09=\frac{209}{100}$

$0.\overline{1}=\frac{1}{9}$ $\quad 0.\overline{3}=\frac{1}{3}$ $\quad 3.4\overline{15}=\frac{1127}{330}$

Fractions équivalentes

On obtient des fractions équivalentes en divisant numérateur et dénominateur par un même entier (on parle alors de réduction ou de simplification) ou en multipliant numérateur et dénominateur par un même entier (on parle alors d'amplification).

Exemple 6

$\frac{6}{9}$ donne par réduction : $\frac{6/3}{9/3}=\frac{2}{3}$ et par amplification : $\frac{6\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{12}{18}$ ou $\frac{6\cdot 3}{9\cdot 3}=\frac{18}{27}$ etc.

Une fraction est dite irréductible quand aucune réduction n'est possible.

Exemple 7

$\frac{18}{24}$ n'est pas irréductible.
Comment la réduire au maximum, c-à-d la rendre irréductible ?

Nous pouvons essayer de diviser simultanément son numérateur et son dénominateur par les nombres premiers successifs. Nous trouvons :

$$\frac{18}{24}=\frac{18/2}{24/2}=\frac{9}{12}=\frac{9/3}{12/3}=\frac{3}{4}$$

Comment trouver un terme manquant pour obtenir deux fractions équivalentes ?

Exemples 8

$\frac{3}{4}=\frac{...}{20}$ pour passer d'un dénominateur 4 à un dénominateur 20,

il faut multiplier par 5. Multiplions aussi par 5 le numérateur 3 et nous obtenons 15 pour le terme manquant.

$\frac{24}{21}=\frac{...}{7}$ pour passer d'un dénominateur 21 à un dénominateur 7,

il faut diviser par 3. Divisons aussi par 3 le numérateur 24 et nous obtenons 8 pour le terme manquant.

$\frac{6}{9}=\frac{...}{12}$ réduisons d'abord la fraction de gauche :

$\frac{2}{3}=\frac{...}{12}$ pour passer d'un dénominateur 3 à un dénominateur 12,

il faut multiplier par 4. Multiplions aussi par 4 le numérateur 2 et nous obtenons 8 pour le terme manquant.

Exercice 2

Réduire au maximum les fractions suivantes :

$\frac{60}{84}$ $\frac{126}{231}$ $\frac{112}{322}$

Exercice 3

Transformer les nombres suivants en fractions irréductibles :

0.45 0.324 $0.\overline{5}$ $0.\overline{23}$

Exercice 4

Compléter pour obtenir des fractions équivalentes.

a) $\frac{1}{2}=\frac{...}{8}$ b) $\frac{32}{80}=\frac{...}{5}$ c) $\frac{4}{7}=\frac{12}{...}$ d) $\frac{48}{6}=\frac{16}{...}$

e) $\frac{12}{21}=\frac{...}{35}$ f) $\frac{24}{20}=\frac{18}{...}$ g) $\frac{...}{18}=\frac{40}{15}$ h) $\frac{12}{...}=\frac{14}{63}$

Multiplication et division de fractions

Lois : $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Remarque : il est souvent préférable de simplifier avant d'effectuer une multiplication.

Exemples 9

$$\frac{24}{49}\cdot\frac{21}{16}=\frac{24\cdot 21}{49\cdot 16}=\frac{3\cdot 8\cdot 3\cdot 7}{7\cdot 7\cdot 2\cdot 8}=\frac{3\cdot 3}{7\cdot 2}=\frac{9}{14}$$

$$\frac{60}{125}:\frac{21}{10}=\frac{60\cdot 10}{125\cdot 21}=\frac{3\cdot 20\cdot 2\cdot 5}{5\cdot 25\cdot 3\cdot 7}=\frac{20\cdot 2}{25\cdot 7}=\frac{4\cdot 5\cdot 2}{5\cdot 5\cdot 7}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{8}{35}$$

Exercice 5

Calculer et réduire au maximum.

a) $\frac{90}{77}\cdot\frac{55}{12}$ b) $\frac{63}{15}\cdot\frac{40}{49}$ c) $5\cdot\frac{3}{4}$ d) $\frac{45}{24}\cdot\frac{28}{33}\cdot\frac{121}{21}$

e) $\frac{100}{18}:\frac{55}{42}$ f) $\frac{60}{21}:\frac{10}{49}$ g) $\frac{12}{25}:15$ h) $14:\frac{21}{4}$

Addition et soustraction de fractions

Exemples 10

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot\mathbf{5}}{3\cdot\mathbf{5}}+\frac{4\cdot\mathbf{3}}{5\cdot\mathbf{3}}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3}{2\cdot2}+\frac{5}{2\cdot3}=\frac{3\cdot\mathbf{3}}{2\cdot2\cdot\mathbf{3}}+\frac{5\cdot\mathbf{2}}{2\cdot3\cdot\mathbf{2}}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{9+10}{12}=\frac{19}{12}$$

$$\frac{7}{48}+\frac{1}{60}=\frac{7}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot2\cdot3\cdot5}=\frac{7\cdot\mathbf{5}}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot\mathbf{5}}+\frac{1\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}}{2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}}=\frac{35}{240}+\frac{4}{240}=\frac{35+4}{240}=\frac{39}{240}=\frac{13}{80}$$

Exercice 6 Calculer (répondre en fractions irréductibles).

a) $\frac{5}{3}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{5}+3$ c) $\frac{1}{48}+\frac{1}{64}$ d) $\frac{4}{3}-\frac{3}{5}$

e) $7-\frac{5}{6}$ f) $\frac{12}{7}-\frac{19}{21}$ g) $\frac{5}{24}+\frac{11}{252}$ h) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

i) $\frac{3}{5}+\frac{5}{3}+\frac{12}{15}$ j) $\frac{4}{3}+\frac{7}{33}+\frac{1}{11}$ k) $2+\frac{7}{5}+\frac{3}{4}$ l) $\frac{1}{75}+\frac{3}{125}+\frac{1}{15}$

m) $\frac{144}{12}+\frac{121}{11}+\frac{250}{50}$

Ordre des opérations

Les priorités sont fixées ainsi :

1) parenthèses
2) puissances & racines
3) multiplications & divisions
4) additions & soustractions

Pour un même niveau de priorité,
on applique l'ordre dicté par la lecture de gauche à droite.

Exemple 11

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5^2}{7}=\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{25}{7}=\frac{4}{5}+\frac{50}{21}=\frac{4\cdot\mathbf{21}}{5\cdot\mathbf{21}}+\frac{50\cdot\mathbf{5}}{21\cdot\mathbf{5}}=\frac{84}{105}+\frac{250}{105}=\frac{334}{105}$$

Exercice 7 Calculer et réduire au maximum.

a) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}$ b) $3-\left(1-\frac{1}{3}\right)$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^2+1$ d) $\dfrac{\frac{1}{2}-2}{3:\frac{3}{4}}$

e) $\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{5}$ f) $\frac{1}{3}-2\cdot\frac{4}{3}-\frac{3}{2}$ g) $\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot\frac{3}{5}$ h) $\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)$

i) $\dfrac{1+\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}}$ j) $\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}{3}$

3. Nombres avec signe

Les règles classiques pour opérer avec des signes sont les suivantes :

• $2\cdot5=10$ • $(-2)\cdot5=-10$ • $2\cdot(-5)=-10$ • $(-2)\cdot(-5)=10$ (idem pour les divisions)	• $2+5=7$ • $-2+5=3$ • $2-5=-3$ • $-2-5=-7$	• $+(+4)=4$ • $-(+4)=-4$ • $+(-4)=-4$ • $-(-4)=4$

Exemple 12

$$
\begin{aligned}
&-5+7\cdot(3-9)-(1-3\cdot(-4)-21)\\
&=-5+7\cdot(-6)-(1+12-21)\\
&=-5+7\cdot(-6)-(-8)\\
&=-5-42+8\\
&=-39
\end{aligned}
$$

Exercice 8 Calculer

a) $126-(-6+64)=$

b) $54-(-17)+(-9)=$

c) $7+9+(20-5)=$

d) $(-4)+(-4)+(-4)=$

e) $3-8-(-8)+(-6)-(-5)=$

f) $6-(-7)-(9-4+1)=$

g) $26-(-3+7)=$

h) $6+(-9-18)=$

i) $-2+(14-54+3)-5=$

Exercice 9 Calculer

a) $(-5)\cdot 7 =$

b) $(-18):(-3)=$

c) $(-2)\cdot 3\cdot(-5)=$

d) $(-5)\cdot 7\cdot(-2)\cdot(-1)=$

e) $(-4)\cdot(-6)\cdot(-5)\cdot(-3)=$

f) $(-15)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-2):(+5)=$

Exercice 10 Calculer

a) $9\cdot(-8)\cdot(10-5\cdot 2)=$

b) $3\cdot 7-7\cdot(-5)-(-8)=$

c) $38-(-4\cdot 7)=$

d) $5\cdot(-8-9)=$

e) $-2\cdot(12-4\cdot 2)\cdot 3=$

Exercice 11 Calculer

a) $(-5)\cdot(-4)\cdot(-12+3\cdot 2)=$

b) $2\cdot 9-5\cdot(-2)+(-3)=$

c) $100+(-5\cdot 8)=$

d) $-6\cdot(-7+8)=$

e) $(-5)\cdot(10-3\cdot 5)\cdot(-4)=$

4. Puissances

Soit n entier > 0

$$\boxed{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n facteurs}}=a^n}$$

a s'appelle la base et n l'exposant

Pour n = 0, on définit $a^0 = 1$ (sauf pour a = 0).
0^0 n'est pas défini.

Exemple 13

$5^3=5\cdot 5\cdot 5=125$

<u>Exercice 12</u> Calculer

a) $3^4 =$

b) $100^2 =$

c) $(-5)^2 =$

d) $12^2 =$

e) $1^9 =$

f) $0,1^2 =$

g) $400^3 =$

h) $(-2)^3 =$

i) $2^3 + 3^2 =$

j) $2^3 \cdot 3^2 =$

k) $4^0 =$

l) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

<u>Exercice 13</u> Calculer

a) $30^3 =$

b) $600^2 =$

c) $(-3)^4 =$

d) $70^2 =$

e) $0,01^2$

f) $0,2^3 =$

g) $0,3^3 =$

h) $35^0 =$

i) $(-1)^{50} =$

j) $(-1)^{51} =$

k) $40^1 =$

l) $\left(-\frac{5}{4}\right)^3 =$

<u>Exercice 14</u> Calculer

a) $(-4-3)^2 - 2^3 =$

b) $(-4)^2 - (-2)(-3)^2 - (-2)^3 =$

c) $(-9)^2 - (-3)^3 + (-5)^3 =$

d) $(-2)\cdot 16 - (-4)^3 - (-2)\cdot(-8) =$

Voici quelques propriétés des puissances :

$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}}$ $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}}$ $(a \neq 0)$ $\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$ $(b \neq 0)$ $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ $(a \neq 0)$

Exemples 14

$3^4 \cdot 3^2 = 3^6$ $\dfrac{4^8}{4^3} = 4^5$ $\left(7^5\right)^3 = 7^{15}$ $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \dfrac{4^3}{5^3}$ $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2}$

Exercice 15 Compléter les exposants qui manquent.

a) $5^6 \cdot 5^{\cdots} = 5^8$ e) $7^{\cdots} \cdot 7^2 = 7^2$ i) $(0.2)^4 \cdot (0.2) = (0.2)^{\cdots}$

b) $2^6 \cdot 2^4 = 2^{\cdots}$ f) $10^{\cdots} \cdot 10^2 = 10^3$ j) $(-2)^3 \cdot (-2)^5 = (-2)^{\cdots}$

c) $2^3 + 2^2 = 2^{\cdots}$ g) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots}$ k) $7^3 \cdot 3^4 \cdot 3^{\cdots} \cdot 7^{\cdots} = 3^6 \cdot 7^9$

d) $3^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots} = 2^6 \cdot 3^9$ h) $3^2 \cdot 3^{\cdots} \cdot 2^4 \cdot 2^{\cdots} = 2^7 \cdot 3^5$ l) $2^7 \cdot 2^{\cdots} \cdot 3^4 \cdot 3^{\cdots} = 2^7 \cdot 3^4$

Exercice 16 Compléter les exposants qui manquent.

i) $a^3 \cdot a^5 = a^{\cdots}$ iv) $a^3 \cdot b^2 \cdot a^4 \cdot a^2 = a^{\cdots} \cdot b^{\cdots}$

ii) $x^4 \cdot x^2 \cdot x = x^{\cdots}$ v) $a^5 \cdot b^{\cdots} \cdot a^{\cdots} \cdot b^2 = a^8 \cdot b^5$

iii) $y \cdot y^5 \cdot y^2 \cdot y^0 = y^{\cdots}$ vi) $x^5 \cdot y^{\cdots} \cdot y^4 \cdot x^{\cdots} = x^6 \cdot y^4$

Exercice 17 Simplifier (en laissant sous forme de puissance(s))

a) $2^5 \cdot 2^{-3} =$

b) $\frac{(0,4)^6}{(0,4)^5} =$

c) $(3+7)^2 =$

d) $(4^{-2})^3 =$

e) $10^3 \cdot 10^{-5} =$

f) $\frac{\pi^3}{\pi^5} =$

g) $(5 \cdot 9)^{-2} =$

h) $(5^3)^{-1} =$

i) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 =$

j) $0^0 =$

Exercice 18 Simplifier (en laissant sous forme de puissance(s))

a) $(-5)^3 \cdot (-5) \cdot (-5)^4 =$

b) $(+3)^4 \cdot (-2) \cdot (+3)^2 \cdot (-2)^3 =$

c) $7^2 \cdot (7^3)^4 =$

d) $3^5 \cdot (3^2 \cdot 3^4) =$

e) $(7^2 \cdot 7^3)^4 =$

f) $(-3)^2 \cdot (-3) \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^4 =$

g) $\left[(5^2)^3 \cdot 3^4\right]^2 =$

h) $(4^2)^3 \cdot (4^3)^5 \cdot 4 =$

Exercice 19 Simplifier (en laissant sous forme de puissance(s))

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) =$

b) $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot 7^3 \cdot \frac{1}{3}\right]^4 =$

c) $\left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 =$

d) $\left[(0,5)^3 \cdot (0,5)^4\right]^2 =$

e) $\frac{2^5 \cdot 2^3}{2^2} =$

f) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot (3^2)^3\right]^2 =$

g) $\frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 2^2}{3^5 \cdot 2^5 \cdot 3^2} =$

h) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^5 =$

5. Notation scientifique

Un nombre est écrit en notation scientifique quand il se présente ainsi :

$a \cdot 10^z$ où a est un nombre décimal (positif ou négatif) tel que $1 \leqslant |a| < 10$
et z est un entier relatif

($|a|$ s'appelle la <u>mantisse</u> du nombre)

<u>Exemples 15</u>

$7800 = 7.8 \cdot 10^3$ $0.000925 = 9.25 \cdot 10^{-4}$ $30 = 3 \cdot 10^1$

$9 = 9 \cdot 10^0$ $10000 = 1 \cdot 10^4$

<u>Exercice 20</u>

Convertir en notation scientifique (avec au plus 3 chiffres après la virgule)

45'000'000'000 = 0.000'000'553'469 =

−387.26 = −0.90098 =

Convertir en notation usuelle (écriture décimale) :

$-6.51 \bullet 10^{-3}$ = $2.99 \bullet 10^{5}$ =

Convertir en notation scientifique (avec au plus 3 chiffres après la virgule)

$44.754 \bullet 10^{13}$ = $-0.007 \bullet 10^{-12}$ =

$890 \bullet 10^{-15}$ = $0.05 \bullet 10^{17}$ =

<u>Exemples 16</u> Calculs avec des puissances de 10

a) $8000 \cdot 200 = 8 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^2 = 8 \cdot 2 \cdot 10^{3+2} = 16 \cdot 10^5 = 1{,}6 \cdot 10^6$

b) $\dfrac{4800000}{1200} = \dfrac{48 \cdot 10^5}{12 \cdot 10^2} = 4 \cdot 10^{5-2} = 4 \cdot 10^3$

c) $\dfrac{0{,}0072}{800} = \dfrac{72 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^2} = 9 \cdot 10^{-4-2} = 9 \cdot 10^{-6}$

d) $(3 \cdot 10^3)^2 = 3^2 \cdot 10^{3 \cdot 2} = 9 \cdot 10^6$

e) $(2 \cdot 10^2)^4 = 2^4 \cdot 10^{2 \cdot 4} = 16 \cdot 10^8 = 1{,}6 \cdot 10^9$

Exercice 21 Calculer en utilisant la « puissance » des puissances de 10
(réponses en notation scientifique)

a) $5000 \cdot 0,000005 =$

b) $\dfrac{5000}{0,005} =$

c) $\dfrac{5000000 \cdot 18000}{90000000} =$

d) $\dfrac{300000 \cdot 0,0000006}{1000 \cdot 0,002} =$

Exercice 22 Calculer (réponses en notation scientifique)

a) $\dfrac{6,4 . 10^{12}}{8 \cdot 10^{-11}} =$

b) $\dfrac{0,2 \cdot 10^{15}}{8 \cdot 10^{-12}} =$

c) $\left(4 \cdot 10^{9}\right)^{3} =$

d) $(2 \cdot 10^{7})^{2} =$

e) $(2 \cdot 10^{5})^{-2} =$

f) $(5 \cdot 10^{-3})^{-2} =$

Exercice 23

La lumière parcourt environ $3 \cdot 10^{5}$ kilomètres par seconde. La distance du Soleil à la Terre est d'environ $1,5 \cdot 10^{8}$ kilomètres. Combien de temps la lumière met-elle pour parcourir la distance du Soleil à la Terre ?

6 Proportions

Deux grandeurs A et B sont dites directement proportionnelles
(on dit aussi qu'elles sont proportionnelles, sans préciser le « directement »)
quand le rapport A/B est constant.

Deux grandeurs A et B sont dites inversement proportionnelles
quand le produit A•B est constant.

Exemples 17

A	1	2	3	4
B	4	8	12	16
A/B	0.25	0.25	0.25	0.25

A et B sont proportionnelles

C	1	2	3	4
D	24	12	8	6
C•D	24	24	24	24

C et D sont inversement proportionnelles

Exercice 24 Compléter le tableau suivant pour que
A et B soient proportionnelles

A	2	3
B	2.7	

Exercice 25 Compléter le tableau suivant pour que
A et B soient inversement proportionnelles

A	2	3
B	2.7	

*

Considérons le tableau :

A	A_1	A_2
B	B_1	B_2

Si A et B sont directement proportionnelles, nous avons :

$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$ qui est équivalent à : $A_1 \cdot B_2 = B_1 \cdot A_2$ C'est le fameux « produit en croix »

Si A et B sont inversement proportionnelles, nous avons :

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2$$

Avec des grandeurs A et B directement proportionnelles :
quand A augmente, B augmente aussi.

Avec des grandeurs A et B inversement proportionnelles :
quand A augmente, B diminue.

Exemple 18

Considérons la formule $d = v \cdot t$ reliant la vitesse v, la distance d et le temps t

Si la vitesse v est constante, la distance et le temps sont directement proportionnels.
Si la distance d est constante, la vitesse et le temps sont inversement proportionnels.
Si le temps t est constant, la distance et la vitesse sont directement proportionnelles.

- Avec une vitesse constante de 60 km/h, nous avons le tableau suivant :

t [en h]	1	2	3	4
d [en km]	60	120	180	240

qui est un tableau de proportionnalité directe. Le rapport $\frac{t}{d}$ vaut toujours $\frac{1}{60}$ et le rapport $\frac{d}{t}$ vaut toujours 60.

- Avec une distance constante de 120 km, nous avons le tableau suivant :

t [en h]	1	2	3	4
v [en km/h]	120	60	40	30

qui est un tableau de proportionnalité inverse. Le produit $v \cdot t$ vaut toujours 120.

- Avec un temps constant de 15 minutes, nous avons le tableau suivant :

v [en km/h]	10	20	30	40
d [en km]	2.5	5	7.5	10

qui est un tableau de proportionnalité directe. Le rapport $\frac{d}{v}$ vaut toujours 0.25 h

et le rapport $\frac{v}{d}$ vaut toujours 4.

Remarque : le temps de 15 minutes donne 0.25 heure, car $\frac{15}{60} = 0.25$.
D'une manière générale, pour convertir des minutes en heures, il faut effectuer une division par 60 ; et pour convertir des heures en minutes, il faut effectuer une multiplication par 60.

Exercice 26

Un véhicule parcourt une distance de 6.3 km en 12 minutes. À la même vitesse, quelle est la distance parcourue en 3h45 ?

Exercice 27

Une voiture roule à la vitesse de 57 km/h et un vélomoteur roule à la vitesse de 38 km/h. Quelle distance parcourt le vélomoteur pendant la même durée que la voiture avance de 41 km ?

Exercice 28

Pour aller d'une ville à une autre par la même route, une moto qui circule à 69 km/h met 13 minutes, et un camion met 17.5 minutes. Quelle est la vitesse du camion ?

Exercice 29

Voici le coût de l'affranchissement d'une lettre en fonction de son poids :

Poids de la lettre en grammes	20 g	40 g	60 g	120 g
Prix du timbre en francs	1,10 F	1,80 F	2,80 F	5 F

D'après les données du tableau, le prix du timbre est-il proportionnel au poids de la lettre ?

Exercice 30

Ce tableau donne le prix d'un carburant en fonction de la quantité. Sous l'hypothèse que le prix est proportionnel à la quantité, compléter le tableau.

Quantité en litres	10	5	15	20			
Prix payé en francs	15				240	480	300

Exercice 31

Un robinet qui débite 18 litres à la minute met 28 heures pour remplir un bassin. Quel temps mettrait-il si son débit était de 42 litres à la minute ?

Exercice 32

L'aire d'un carré est-elle proportionnelle à son côté ?

Côté d'un carré en cm	2	3	4	5	6
Aire du carré en cm^2					

Exercice 33

Un chauffeur de taxi fait payer 2.50 F par kilomètre, et demande 10 F de prise en charge.

Distance en km	2	3	4	5	6
Prix à payer en F					

Y a-t-il proportionnalité entre les deux grandeurs ?

Exercice 34

À la vitesse moyenne de 85.5 km/h un train met 3h15 pour aller de Paris à Bruxelles. Combien de temps durera ce trajet si l'on augmente de 12 km/h la vitesse moyenne du train ?

Exercice 35

Dans un magasin, pour 3 kg de pommes, on paie 10.50 F. Que payerait-on pour 4 kg ? Et pour 5 kg ?

Exercice 36

Pour creuser une tranchée, 5 soldats mettent 47 heures. Combien de temps auraient mis 8 soldats pour creuser la même tranchée ?

Exercice 37

Un train part de Marseille à 7h45 et arrive à Paris à 11h45. La distance parcourue est de 780 km. À la même vitesse, combien de temps mettrait ce train pour se déplacer de 1'170 km ?

Exercice 38

Un organisateur d'excursion fait des provisions pour 6 jours, prévues pour 12 personnes. Finalement, 18 personnes participent à l'excursion. Combien de temps les provisions dureront-elles ?

Exercice 39

Une imprimante a un débit de 8 pages par minute. En combien de temps imprimera-t-elle un document de 360 pages ?

Exercice 40

Qui est le plus rapide :

le lièvre qui parcourt 300 m en une minute ;
la baleine qui parcourt 12 m en une seconde ?

Exercice 41

Un excentrique veut remplir son jacuzzi avec du vin mousseux. Il faut 24 tonneaux de 35 litres pour le remplir. Combien faudrait-il de tonneaux de 40 litres pour le remplir ?

Exercice 42

Un ouvrier gagne 150 F pour 8 heures de travail.
a) Que gagne-t-il en 10 heures ?
b) Pour gagner 525 F, combien d'heures doit-il travailler ?

Exercice 43

Un peintre en bâtiment utilise 5 kg de peinture pour peindre un mur carré de 3 m de côté. Quelle quantité de peinture lui faudra-t-il pour peindre un mur carré de 6 m de côté ?

Exercice 44

Une provision de sang riche en cholestérol permet de nourrir 36 vampires pendant 175 jours. Combien de temps durerait la même provision si elle était destinée à 126 vampires ?

Exercice 45

Le corps d'un être appétissant
donne quatre litres de sang.
Dracula doit boire en moyenne
vingt litres de sang par semaine
pour ne pas perdre son humour.
Combien lui faut-il de victimes
pour tenir cent trente-trois jours
sans s'écarter de ce régime ?

7. Pourcentages

Soient deux nombres T et U ($T \geq 0$ et $U > 0$).
Posons $P = 100 \cdot T/U$
On dit alors que T représente P % de U.

Exemple 19

Pour trouver quel pourcentage de 16 représente 10, nous faisons $100 \cdot 10/16 = 62.5$.

Ainsi : 10 représente 62.5 % de 16.

*

Comment calculer T = P % de U ?
T s’obtient en multipliant U par P/100.

Comment calculer U quand nous savons que les P % de U donnent T ?
U s’obtient en divisant T par P/100.

Exemples 20

Combien donnent 6 % de 53 ? Réponse : 53•6/100 = 3.18

Quel est le nombre dont les 8 % donnent 107 ? Réponse : 107/(8/100) = 1’337.5

Exercice 46

Un crémier achète 2'000 œufs et 1.5 % des œufs se cassent pendant le transport. Combien reste-t-il d’œufs à ce crémier ?

Exercice 47

D’après un sondage d’opinion, 7 personnes sur 20 ne s’intéressent pas aux retransmissions télévisées de football. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

Exercice 48

Dans un collège de 642 élèves, 45 % sont des garçons. Quel est le pourcentage de filles dans ce collège ?

Exercice 49

Si l’eau représente 59 % de la masse du corps humain, combien y a-t-il d’eau dans le corps d’une personne pesant 70 kg ?

Exercice 50

Le prix d’un vélo est de 530 F. En période de soldes, ce prix est réduit de 20 %. Quel est le nouveau prix ?

Exercice 51

Un billet de train avec 20 % de réduction coûte 100 F.
Combien coûte un billet sans réduction pour le même trajet ?

Exercice 52

On a goudronné les 60 % d’un chemin, à savoir 540 mètres. Quelle longueur reste-t-il à goudronner ?

Exercice 53

Les docteurs Andrade et Srihari, chercheurs au *National Institute of Mental Health and Neurosciences of Bangalore* (India), ont publié en 2001 une étude qui montre que 4.5 % des adolescents mangent leurs crottes de nez. Si l'on suppose que ce pourcentage peut s'appliquer à la population d'un collège de 311 élèves, combien d'entre eux ingurgitent leurs crottes de nez ?

Exercice 54

Une grande entreprise emploie 7'600 personnes. 27 % sont des Terriens et 73 % des Martiens sous-payés. Suite à de juteux bénéfices, la direction licencie 665 Terriens. Calculer le nouveau pourcentage de Martiens.

Exercice 55

Le prix usuel d'une guillotine est de 5'300 francs. En période de révolution ce prix augmente de 20 %. À combien revient alors une guillotine ?

Exercice 56

Après rabais de sept pour cent,
je dois débourser quinze cents
dollars pour corrompre le maire.
À combien se montait l'affaire
avant cette réduc légère ?

Exercice 57

La fortune d'Ernestine a augmenté de 30 % entre 2013 et 2014, puis de 20 % entre 2014 et 2015. De combien de % a-t-elle augmenté entre 2013 et 2015 ?

Exercice 58

Dans le pays X, entre décembre 2002 et décembre 2003, le pouvoir d'achat a diminué de 12 %, mais il a augmenté de 12 % entre décembre 2003 et décembre 2004. Edgar se réjouissait du retour en décembre 2004 au même niveau qu'en décembre 2002. Mais était-ce bien le cas ?

Exercice 59

La dette du pays X, qui avait augmenté de 15 % l'an passé, n'a augmenté cette année que de 14 %. Le gouvernement se félicite de sa gestion exemplaire.

Y a-t-il vraiment de quoi se féliciter ?

Pour le savoir, compléter le tableau suivant :

Dette en début 2017 = 100 milliards	15 % de cette dette = ...
Dette en début 2018 = ...	14 % de cette dette = ...

Exercice 60 *Paradoxe de Simpson*

Compléter le tableau suivant :

École A	**Effectifs**	**Nombre de réussites**	**Taux de réussite en %**	**Compléter par « mieux » ou par « moins bien »**
Garçons	87	81		Les garçons réussissent
Filles	270	234		....
	Total 357			que les filles
École B	**Effectifs**	**Nombre de réussites**	**Taux de réussite en %**	**Compléter par « mieux » ou par « moins bien »**
Garçons	263	192		Les garçons réussissent
Filles	80	55		....
	Total 343			que les filles
École A + École B	**Effectifs**	**Nombre de réussites**	**Taux de réussite en %**	**Compléter par « mieux » ou par « moins bien »**
Garçons				Les garçons réussissent
Filles				....
	Total			que les filles

Exercice 61 *Importance du taux de base*

Une maladie touche, dans la population genevoise, trois personnes sur mille. Cette maladie est toujours mortelle, mais on peut sauver le patient grâce à une opération passablement risquée. Cette opération sauve une personne malade sur deux, mais tue la moitié des personnes opérées. Avant de décider l'opération, on peut utiliser un test de dépistage qui permet de détecter la maladie. Avec ce test, 96 % des malades obtiennent un résultat « positif » (c'est-à-dire, le test dit : « vous êtes malade »), mais 6 % des personnes saines obtiennent aussi un résultat « positif » (on dit que ce sont des « faux positifs »). Une personne choisie au hasard passe le test. Ce test donne un résultat positif. Conseillez-vous à la personne de se faire opérer ?

Pour vous aider à répondre, compléter :

	personnes malades	personnes saines	totaux
effectifs	0.3 % de 500'000 = ...	99.7 % de 500'000 = ...	500'000
obtiennent un résultat positif	96 % de .... = ...	6 % de .... = ...	....

Le test déclare malades .... personnes.

Mais, parmi elles, sont réellement malades .... personnes,

ce qui représente .... %

Si on opère toutes les personnes déclarées malades par le test, cette opération sauvera

.... malades,

mais elle tuera .... personnes,

dont .... saines