Quelques bases du calcul algébrique

<u>Notice historique</u>

<table>
<tr>
<td>Le mot « algèbre » est dérivé du titre d’un ouvrage du 9e siècle :

Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala (Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison)

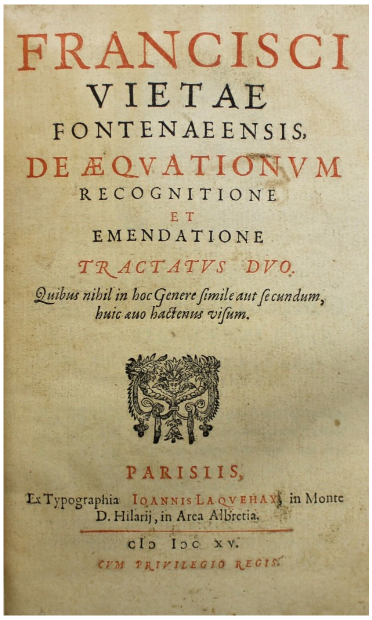
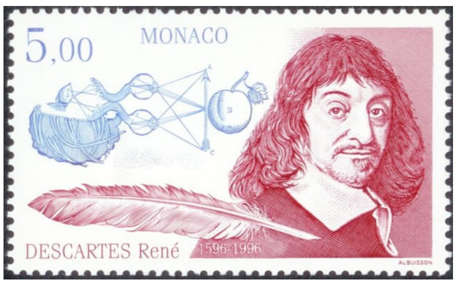
Son auteur est un Perse : Al-Khwarizmi. De son nom est dérivé le mot « algorithme ».

Le mot arabe al-djabr (الجبر) signifie « réduction d'une fracture », « réunion des morceaux », « reconstruction », « connexion », « restauration », « reboutement ».

Al-Khwarizmi l’emploie pour désigner l’ajout d’une même quantité aux deux membres d’une égalité. Al-djabr, en latin, devint algebra.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Pendant longtemps, le calcul algébrique se fit avec des mots.

Il fallut attendre

Viète (1540 – 1603) et
Descartes (1596 – 1650)

pour qu’apparaisse une notation symbolique avec des lettres.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Notation multiplicative simplifiée

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, le signe • de multiplication est généralement omis.

Exemples

- On écrit $5a$ pour $5 \cdot a$
- On écrit $3x^2y$ pour $3 \cdot x^2 \cdot y$
- On écrit $4x(x+y)$ pour $4 \cdot x \cdot (x+y)$
- On écrit $(a+b)(2a-b)$ pour $(a+b) \cdot (2 \cdot a-b)$

Remarque : $x(-3)$ n'est pas équivalent à $x-3$
$x(-3)$ désigne la multiplication de x par -3
$x-3$ désigne la soustraction de 3 à x

Ordre des opérations

Les priorités sont fixées ainsi :

1) parenthèses
2) puissances & racines
3) multiplications & divisions
4) additions & soustractions

Pour un même niveau de priorité,
on applique l'ordre dicté par la lecture de gauche à droite.

Rappelons les règles avec les signes :

• $2 \cdot 5=10$ • $(-2)5=-10$ • $2(-5)=-10$ • $(-2)(-5)=10$ (idem pour les divisions)	• $2+5=7$ • $-2+5=3$ • $2-5=-3$ • $-2-5=-7$	• $+(+4)=4$ • $-(+4)=-4$ • $+(-4)=-4$ • $-(-4)=4$

Exemple

$$2+3(1+4 \cdot 5^2)=2+3(1+4 \cdot 25)=2+3(1+100)=2+3 \cdot 101=2+303=305$$

Exercice 1 Calculer

a) $5-3^2 4=$

b) $(-5)^2-5^2-3 \cdot 4-8-2 \cdot 4=$

c) $2 \cdot 10^2-(1-4 \cdot 5)+6(3+4)=$

d) $(-8)^2-4(-1)-1=$

Évaluer une expression

Soit une expression algébrique contenant des lettres. Si des valeurs sont attribuées à ces lettres, évaluer cette expression consiste à la calculer en remplaçant les lettres par les valeurs données.

Exemple Considérons l'expression : $3xy^2-5y$

- Si $x=7$ et $y=10$, l'évaluation de l'expression donne :

$$3\cdot 7\cdot 10^2-5\cdot 10=3\cdot 7\cdot 100-5\cdot 10=2100-50=2050$$

- Si $x=8$ et $y=-10$, l'évaluation de l'expression donne :

$$3\cdot 8\cdot(-10)^2-5\cdot(-10)=3\cdot 8\cdot 100-5\cdot(-10)=2400+50=2450$$

Exercice 2 Évaluer les expressions suivantes pour $x=4$ et $y=-10$

a) $5x+6y$

b) $5x-6y$

c) $7x+3xy+5y^2$

d) $7x-3xy-5y^2$

Réduction dans les sommes et dans les produits

Exemples de réduction

- $1x=x$
- $-1x=-x$
- $yx=xy$
- $x^1=x$
- $x^3y^5x^4y^6=x^7y^{11}$
- $xx^3=x^4$
- $3x^2y(-4)x^5=-12x^7y$
- $-5ab^2c^3 4a^{10}c^{20}=-20a^{11}b^2c^{23}$

- $3a+4a=7a$
- $3a+a=4a$
- $3a-a=2a$
- $2b-7b=-5b$
- $2b-3b=-b$
- $-3x-7x=-10x$
- $7x^2y+3yx^2=10x^2y$
- $a+3b-5c-7a-3b-4c=-6a-9c$

Exercice 3 Réduire

a) $4(-2)x^3(-1)x^5=$

b) $(-10)4x=$

c) $x^2y^{10}z^5x^7y=$

d) $-x^2y^3(-6)xy^4=$

e) $2x3y(-4)zx^2y=$

f) $2x^33x^210yyyy=$

Exercice 4 Réduire

a) $x + y + 3x + 5y =$

b) $x + 2y - 5x + 8 =$

c) $5x - 6 + y - 6x - 5y =$

d) $x + z - 6y + 4x - 10 =$

e) $4x + 2y - 5x - 6y + z + 3 =$

f) $-2x - 4y - 5z + x + 2y - z + 4 =$

g) $3x + 4 - 6y + 5 - 7x + 5z =$

h) $-5x + 5 - 7y - 8 + 9z - x - 10z =$

i) $xy + z + x + 3z =$

j) $xy + xy + xy + z =$

k) $a + ab - bc - 4ab + 3ac =$

l) $a + b - 3a - 5b + ab - 6 =$

m) $xy + yx =$

n) $ab + bc + ac - 3bc + 4ab - ac =$

o) $10 + 5x + 2y - 5x - 2y - 3 =$

p) $1 - a - c - d + a + b + 3c + 4d - 12 =$

Exercice 5 Réduire

a) $2m+3m^2-5m+2m^2=$

b) $4xy+3xy^2-2xy=$

c) $5xy^2-7x^2y+xy^2-3x^2y^2-8x^2y+xy=$

d) $13-x^2+7x^3-4+3x-x^2-8x^3+x^4=$

Développement par distributivité

$$p(A \pm B \pm C \pm ...) = pA \pm pB \pm pC \pm ...$$

Exemples

- $2(x+y-z)=2x+2y-2z$
- $5(3x-2y)=15x-10y$
- $-2(5x-4y)=-10x+8y$
- $-(3x-y+z)=(-1)(3x-y+z)=-3x+y-z$
- $2x^2y(3x+5x^4y^6z^3)=6x^3y+10x^6y^7z^3$
- $(2x+y^2)(5x^3-4x^6y^7)=(2x+y^2)5x^3-(2x+y^2)4x^6y^7=10x^4+5x^3y^2-8x^7y^7-4x^6y^9$

Exercice 6 Développer

a) $5(x+2y-4)=$

b) $-3(x+2y-4)=$

c) $(2x-10)8=$

d) $x(x-2y+11)=$

e) $2x(x-xy+7x^2-11)=$

f) $5x^2y(2x^3y-1)=$

Exercice 7 Compléter

a) $5(x+........)=........+30$

b) $-2x(........-5)=7x^3$ ....

Exercice 8 Développer et réduire

a) $1+2\cdot(x-y)+y$

b) $3\cdot(x+2y)+x-3y$

c) $5-3(3-5x)+x$

d) $2x-2\cdot(1-x+3y)+4x-6y$

e) $10+3\cdot(x-2-y)-3y-5x$

f) $3-5\cdot(-x-3y+2)-5+2x+5y$

g) $3x+2\cdot(3+5x-y)+6y$

h) $10-(3x-2y+6)+4-5x-2y$

i) $5x-(-3-2x-4y)+3x+5+y$

j) $12-(x+y+1)-4x-7y+6$

k) $y-(x-y)+x+y$

l) $45x+0\cdot(234x-876y+3)-19$

m) $(3+x)(x+2)$

n) $(2x-1)(x^2+2)$

o) $(2x-3)(7x^2-5x+1)$

p) $-(3-2x)(x+5)$

q) $x^2+(2-x)(x+2y)+(x-3)(y+4x)+y^2$

r) $x^2+(2-x)(x-3)-(2x-5)(2-x)+3x$

Produits remarquables

Plusieurs produits sont nommés remarquables. En voici deux :

$$\boxed{\begin{array}{l}(A\pm B)^2=A^2\pm 2\mathrm{AB}+B^2\\(A+B)(A-B)=A^2-B^2\end{array}}$$

Exemples

- $(5x+3)^2=(5x)^2+2(5x)3+3^2=25x^2+30x+9$
- $(4-7x)^2=4^2-2\cdot 4\cdot 7x+(7x)^2=16-56x+49x^2$
- $(10x+1)(10x-1)=(10x)^2-1^2=100x^2-1$

Exercice 9 Développer

a) $(3x+1)^2$
b) $(6x+9y)^2$
c) $(4x^3-y)^2$
d) $(11a-13b)^2$
e) $(17x^4+5x^3)^2$
f) $(3xy-7x)^2$
g) $(2x-3y)(2x+3y)$
h) $(5xy-7)(5xy+7)$
i) $(8x+3)(3-8x)$
j) $(4a^3b+5c^2)(4a^3b-5c^2)$

Mise en évidence

La distributivité, prise dans l'autre sens, permet de faire ce qu'on appelle une mise en évidence.

Exemples

- $a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}-c\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(a+b-c)$
- $4x^3+5x^2=4x\boldsymbol{x^2}+5\boldsymbol{x^2}=\boldsymbol{x^2}(4x+5)$
- $a(\boldsymbol{x+y})+b(\boldsymbol{x+y})=(\boldsymbol{x+y})(a+b)$
- $5xy^2-7x^3y=5\boldsymbol{xy}\,y-7x^2\boldsymbol{xy}=\boldsymbol{x\,y}(5y-7x^2)$

Exercice 10 Transformer par mise en évidence

a) $a\,x+2\,x$
b) $a\,x\,y-3\,x\,y$
c) $6\,x^5-7\,x^3$
d) $p\,v-p\,c+3\,p$
e) $a(x-1)-b(x-1)$
f) $10\,x^9\,y^3+5\,x^2\,y^{13}$
g) $a(x+y)+(x+y)$
h) $a(x+y)-(x+y)$
i) $2\,a(x-3\,y)+5\,b(x-3\,y)$
j) $a(x-y)+b(y-x)$

Des mises en évidence partielles permettent parfois une seconde mise en évidence, cette fois-ci globale.

Exemples

- $a\,x+2\,y+2\,x+a\,y=x(a+2)+y(2+a)=(a+2)(x+y)$

  Nous pouvons aussi faire :

  $a\,x+2\,y+2\,x+a\,y=a(x+y)+2(x+y)=(x+y)(a+2)$

- $p\,u-u+p\,v-v=u(p-1)+v(p-1)=(p-1)(u+v)$

  Nous pouvons aussi faire :

  $p\,u-u+p\,v-v=p(u+v)-(u+v)=(u+v)(p-1)$

Exercice 11 Transformer par mise en évidence

a) $a\,x-3\,y+a\,y-3\,x$
b) $4\,x-b-b\,x+4$
c) $9\,x-9\,y-a\,x+a\,y$
d) $a^2-4\,a+a\,c-4\,c$
e) $3\,a-a\,b+3b-b^2$
f) $4\,a\,y-2\,b\,y+2\,a\,z-b\,z$
g) $a^2\,c^2-a\,c\,d+a\,b\,c-b\,d$
h) x^3+x^2+x+1
i) $11\,a^3+55\,a^2+6\,a+30$
j) $a\,x^2+3\,b+b\,x^2+3\,a$

Au procédé de la mise en évidence, on peut ajouter des produits remarquables pour aller plus loin dans une écriture en facteurs.

Exemples

- $4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$
- $9a^2-6ab+b^2=(3a-b)^2$
- $ax^2-25a=a(x^2-25)=a(x-5)(x+5)$
- $ax^2-36ay^2=a(x^2-36y^2)=a(x-6\mathrm{y})(x+6\mathrm{y})$
- $ax^2+3x^2-3y^2-ay^2=x^2(a+3)-y^2(a+3)=(a+3)(x^2-y^2)=(a+3)(x-y)(x+y)$

Exercice 12 Transformer par mise en évidence et produits remarquables

a) $25-16a^2$

b) $a^2x^2-b^2x^2$

c) $72-2x^2$

d) $2a^2+8ab+8b^2$

e) $25a^2-6b^2$

f) $a^2x-4abx+4b^2x$

g) $28a^2-63$

h) x^3-2x^2-x+2

i) $7x^3-3x^2-28x+12$

j) $a^2b^2-1+b^2-a^2$

Simplifier des fractions algébriques

On se base sur la propriété : $\frac{AB}{AC}=\frac{B}{C}$

Avec des puissances, cette propriété devient :

$$\frac{A^m B}{A^n C}=\begin{Bmatrix} \frac{A^{m-n} B}{C} & si \quad m>n \\ \frac{B}{A^{n-m} C} & si \quad n>m \\ \frac{B}{C} & si \quad M=n \end{Bmatrix}$$

Exemples

- $\frac{3x}{3y}=\frac{x}{y}$
- $\frac{5xy}{3xz}=\frac{5y}{3z}$
- $\frac{2x^3 y}{xz}=\frac{2x^2 y}{z}$
- $\frac{3x^2 y}{x^{10} z}=\frac{3y}{x^8 z}$
- $\frac{5x^2 y^8}{x^6 y}=\frac{5y^7}{x^4}$
- $\frac{ax+bx}{xy}=\frac{x(a+b)}{xy}=\frac{a+b}{y}$
- $\frac{ax^2+bx}{bx^3-ax^2}=\frac{x(ax+b)}{x^2(bx-a)}=\frac{ax+b}{x(bx-a)}$
- $\frac{ax+ay}{x^2-y^2}=\frac{a(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{a}{x-y}$
- $\frac{x^2+6x+9}{5x+15}=\frac{(x+3)^2}{5(x+3)}=\frac{x+3}{5}$

Exercice 13 Simplifier

a) $\frac{a\,m\,x^3}{b\,m\,x}$

b) $\frac{15\,a^5\,b^3\,c^{10}}{5\,a^2\,b^{16}\,c}$

c) $\frac{7\,x^4\,y\,z^{10}}{x\,y^6\,z^{10}}$

d) $\frac{b+b^2}{a+a\,b}$

e) $\frac{m+m\,x}{m-m\,x}$

f) $\frac{mxy-nxy}{m-n}$

g) $\frac{2\,a^2+4\,b}{3\,ab+6\,b^2}$

h) $\frac{x^2-2\,xy}{xy-2\,y^2}$

i) $\frac{3\,a^2b-5\,a\,b^2}{3\,acd-5\,bcd}$

j) $\frac{x^2\,y^3-x\,y^3}{x^3\,y\,z-x^2\,y\,z}$

k) $\frac{a^3+3\,a^2}{a^2-9}$

l) $\frac{a^2b-a\,b}{a^2-1}$

m) $\frac{a^2-4}{a^2+2\mathrm{a}}$

n) $\frac{a^2-2\,a+1}{a^2-1}$

o) $\frac{2\,m\,x-10\,x}{m^2-25}$

p) $\frac{3\,m^2+6\,m+3}{9\,m+9}$

q) $\frac{x^2+4\,x+4}{x^2-4}$

r) $\frac{(a-1)(a+1)^2}{a^3-a}$

Opérations sur des fractions algébriques

Rappelons des propriétés élémentaires des fractions :

$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{A\,D\pm B\,C}{B\,D}$ en particulier : $\frac{A}{B}\pm C=\frac{A\pm B\,C}{B}$

$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\,C}{B\,D}$ en particulier : $\frac{A}{B}\cdot C=\frac{A\,C}{B}$

$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\,D}{B\,C}$ en particulier : $\frac{\frac{A}{B}}{C}=\frac{A}{B\,C}$ et $\frac{A}{\frac{C}{D}}=\frac{A\,D}{C}$

Nous pouvons utiliser ces propriétés sur des fractions algébriques et simplifier le résultat.

Exemples

- $x \cdot \frac{5x-1}{x^2} = \frac{x(5x-1)}{x^2} = \frac{5x-1}{x}$

- $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x} = \frac{x^2-3(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x^2-3x+6}{x(x-2)}$

- $\frac{x-\frac{1}{x}}{x+1} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x+1} = \frac{x^2-1}{x(x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x}$

Exercice 14 Effectuer les opérations et simplifier

a) $(x+10) \cdot \frac{x-5}{x^2-100}$

b) $\frac{5}{x} + \frac{4}{x+1}$

c) $\frac{2}{x-3} - \frac{7}{x}$

d) $3x + \frac{x}{x-1}$

e) $\frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x-3}{x^5}}$

f) $\frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x}{x-3}}$

g) $\frac{1}{\frac{3}{x}+\frac{x}{4}}$

h) $\frac{\frac{x}{5}-\frac{5}{x}}{x+5}$

i) $a-x+\frac{x^2}{a+x}$

j) $\frac{m^2-4}{x^2+1} \cdot \frac{x^3+x}{m^3+2m^2}$

k) $\frac{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}}{\frac{2y}{x^2-y^2}}$

Transformer une égalité

Dans une égalité A = B,
A s'appelle le membre de gauche et B le membre de droite.

Les cinq principales possibilités de transformer une égalité A = B en conservant son caractère d'égalité sont :

l'inversion de l'ordre : B = A
l'ajout d'une quantité q aux deux membres : A + q = B + q
la soustraction d'une quantité q aux deux membres : A − q = B − q
la multiplication des deux membres par une quantité q non nulle : Aq = Bq
la division des deux membres par une quantité q non nulle : A/q = B/q

Exemples

1. Soustrayons B aux deux membres de $A=B$:

$A-\boldsymbol{B}=B-\boldsymbol{B}$ nous obtenons :

$A-B=0$ (car un nombre soustrait à lui-même donne 0)

2. Divisons par B (supposé non nul) les deux membres de $A=B$:

$\frac{A}{\boldsymbol{B}}=\frac{B}{\boldsymbol{B}}$ nous obtenons :

$\frac{A}{B}=1$ (car un nombre divisé par lui-même donne 1)

3. Multiplions par bd (supposé non nul) les deux membres de $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$:

$\frac{a\,\boldsymbol{bd}}{b}=\frac{c\,\boldsymbol{bd}}{d}$ (car $bd=\frac{bd}{1}$ et le produit de fractions se fait
en multipliant ensemble les numérateurs
et en multipliant ensemble les dénominateur)

nous obtenons :

$a\,d=c\,b$ (car $\frac{\boldsymbol{b}}{b}=1$ et $\frac{\boldsymbol{d}}{d}=1$)

Nous avons ici établi trois importantes équivalences :

$A=B$ est équivalent à $A-B=0$

$A=B$ est équivalent à $\frac{A}{B}=1$ (à condition que $B\neq0$)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ est équivalent à $a\,d=c\,b$ (à condition que $bd\neq0$)

cette dernière équivalence est connue sous la dénomination de « produit en croix »

Voyons maintenant comment isoler une variable. Cette activité s'avère très importante dans de nombreux domaines des mathématiques, de la physique et des autres sciences de la nature, de l'informatique, etc.

Isoler une variable dans une égalité signifie :

> transformer l'égalité en une nouvelle égalité
> où cette variable sera toute seule à gauche ou toute seule à droite du signe =

Exemples

1. Pour isoler *b* dans $a+b=c$, soustrayons *a* aux deux membres :

   $a+b\mathbf{-a}=c\mathbf{-a}$ d'où :

   $b=c-a$

2. Pour isoler *b* dans $a-b=c$, soustrayons *a* aux deux membres :

   $a-b\mathbf{-a}=c\mathbf{-a}$ d'où :

   $-b=c-a$ Multiplions par (−1) les deux membres :

   $(\mathbf{-1})(-b)=(\mathbf{-1})(c-a)$ Distribuons et réduisons :

   $b=-c+a$

3. Pour isoler *q* dans $2q=r$, divisons par 2 les deux membres :

$\frac{2q}{\mathbf{2}}=\frac{r}{\mathbf{2}}$ d'où :

$q=\frac{r}{2}$

4. Pour isoler *q* dans $pq=r$, divisons par *p* les deux membres :

$\frac{pq}{\boldsymbol{p}}=\frac{r}{\boldsymbol{p}}$ d'où :

$q=\frac{r}{p}$

5. Pour isoler *d* dans $abc=de$, divisons par *e* les deux membres :

$\frac{abc}{\boldsymbol{e}}=\frac{de}{\boldsymbol{e}}$ d'où :

$\frac{abc}{e}=d$

6. Pour isoler *b* dans $abc=de$, divisons par *ac* les deux membres :

$\frac{abc}{\boldsymbol{ac}}=\frac{de}{\boldsymbol{ac}}$ d'où :

$b=\frac{de}{ac}$

7. Pour isoler *b* dans $2(a+b)c=3d$, divisons d'abord par 2*c* les deux membres :

$\frac{2(a+b)c}{\mathbf{2}\boldsymbol{c}}=\frac{3d}{\mathbf{2}\boldsymbol{c}}$ d'où :

$a+b=\frac{3d}{2c}$ Soustrayons *a* aux deux membres :

$a+b\boldsymbol{-a}=\frac{3d}{2c}\boldsymbol{-a}$ d'où :

$b=\frac{3d}{2c}-a$

8. Pour isoler *e* dans $ab=\frac{c}{de}$, récrivons d'abord cette égalité ainsi :

$\frac{ab}{1}=\frac{c}{de}$ Nous pouvons alors utiliser la formule du produit en croix :

$abde=c$ Divisons par *abd* les deux membres :

$\frac{abde}{\mathbf{abd}}=\frac{c}{\mathbf{abd}}$ d'où :

$e=\frac{c}{abd}$

9. Pour isoler *b* dans $\frac{2}{a-b}=\frac{\pi}{c}$, commençons par utiliser le produit en croix :

$2c=\pi(a-b)$ Divisons par π les deux membres :

$\frac{2c}{\boldsymbol{\pi}}=\frac{\pi(a-b)}{\boldsymbol{\pi}}$ d'où :

$\frac{2c}{\pi}=a-b$ Soustrayons *a* aux deux membres :

$\frac{2c}{\pi}\boldsymbol{-a}=a-b\boldsymbol{-a}$ d'où :

$\frac{2c}{\pi}-a=-b$ Multiplions par (−1) les deux membres :

$(\mathbf{-1})(\frac{2c}{\pi}-a)=(\mathbf{-1})(-b)$ Distribuons et réduisons :

$-\frac{2c}{\pi}+a=b$

<u>Exercice 15</u>

a) Isoler *x* dans $x+2y=z$

b) Isoler *x* dans $2x-y=z$

c) Isoler *x* dans $ab=cx$

d) Isoler *x* dans $\frac{x}{y}=\frac{y}{ab}$

e) Isoler *x* dans $\frac{3}{x}=ab$

f) Isoler *x* dans $(ax+b)c=d$

g) Isoler *x* dans $z=\frac{w(x-y)}{2}$

Exercice 16

a) Isoler I dans $U=RI$

b) Isoler m dans $E=mc^2$

c) Isoler t dans $v=\frac{d}{t}$

d) Isoler h dans $E=mgh$

e) Isoler b dans $A=\frac{ab}{2}$

f) Isoler b dans $A=\frac{(a+b)h}{2}$

g) Isoler m_2 dans $F=G\frac{m_1 m_2}{d^2}$

h) Isoler ω dans $T=\frac{2\pi}{\omega}$

i) Isoler μ dans $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$

j) Isoler p dans $R=\frac{1}{npq}+\epsilon$

k) Isoler R dans $v_{lib}=\sqrt{\frac{GM}{R}}$

l) Isoler H dans $R=2\sqrt{h(H-h)}$

m) Isoler r_1 dans $T^2=\frac{4\pi^2}{G(M_1+M_2)}(r_1+r_2)^3$

n) Isoler a dans $(P+\frac{a}{V^2})(V-b)=RT$

o) Isoler P dans $W=PV_f-PV_i$

p) Isoler R dans $T=\frac{\alpha R}{R+2\mathrm{r}}$