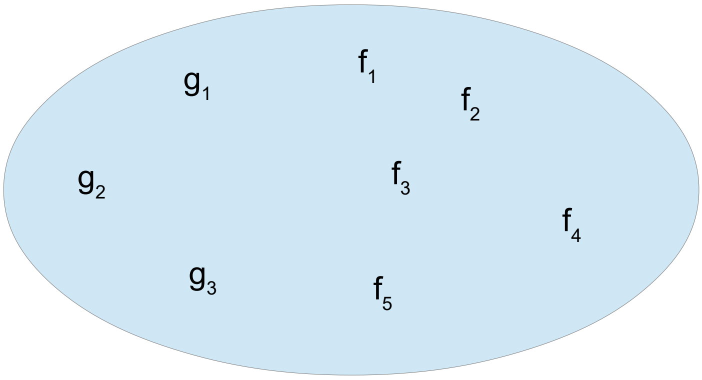
Quelques principes simples de dénombrement

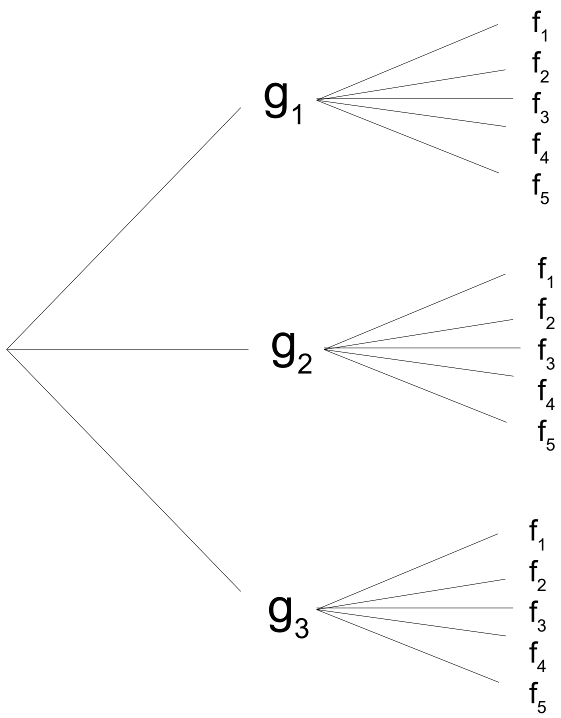
Soit une petite classe comportant 3 garçons et 5 filles.



<un> Le professeur veut choisir une personne : un garçon ou une fille.
Le nombre de possibilités vaut :
3 + 5 = 8 (principe additif)

<deux> Le professeur veut choisir deux personnes : successivement un garçon et une fille.
Le nombre de possibilités vaut :
3 • 5 = 15 (principe multiplicatif)

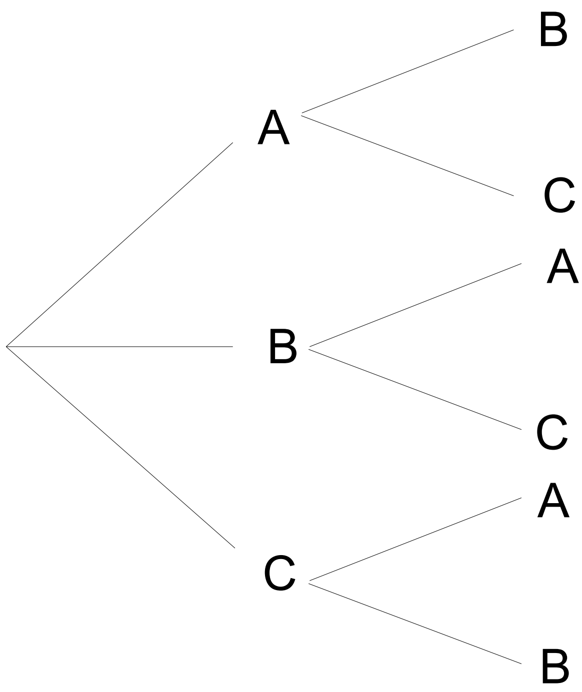
Ce principe multiplicatif peut être illustré par un arbre.



<trois> Le professeur veut choisir deux garçons, en attachant de l'importance à l'ordre dans lequel ils sont choisis.
Le nombre de possibilités vaut :
$3 \cdot 2 = 6$ (principe multiplicatif)

Il a en effet 3 choix pour le premier garçon ; puis il ne lui reste plus que 2 choix pour le second.

Appelons A, B, C ces trois garçons et dessinons un arbre :



Les 6 possibilités sont :

AB
AC
BA
BC
CA
CB

<quatre> Supposons maintenant que le professeur n'attache pas d'importance à l'ordre dans lequel les garçons sont choisis.
Le nombre de possibilités vaut :
6 / 2 = 3 (principe de restriction par division)
puisqu'il faut supprimer, dans l'énumération précédente, un couple sur deux, en raison de la permutation gauche-droite.

Ces 3 possibilités sont :

AB
AC
BC

<cinq> Le professeur veut choisir deux filles, en attachant de l'importance à l'ordre dans lequel elles sont choisies, mais il ne veut pas que Lola fasse partie de son choix.
Pour la première fille à choisir, le nombre de possibilités vaut :
5 − 1 = 4 (principe de restriction par soustraction)
puis il ne lui reste plus que
3 possibilités pour la seconde.
Cela fait en tout :
4 • 3 = 12 possibilités (principe multiplicatif)

<six> Sans cette restriction concernant Lola, le nombre de possibilités vaut :
5 • 4 = 20 (principe multiplicatif)

<sept> Le professeur veut choisir deux garçons ou deux filles, en attachant de l'importance à l'ordre dans lequel les élèves sont choisis.
Selon <trois>, le nombre de possibilités avec 2 garçons vaut 6.
Selon <six>, le nombre de possibilités avec 2 filles vaut 20.
Cela fait en tout :
6 + 20 = 26 possibilités (principe additif)

<huit> Le professeur veut choisir deux personnes, dont un garçon et une fille, en attachant de l'importance à l'ordre dans lequel les élèves sont choisis.

Premier cas de figure : il choisit d'abord un garçon, puis une fille.
Le nombre de possibilités vaut :
3 • 5 = 15 (principe multiplicatif)

Second cas de figure : il choisit d'abord une fille, puis un garçon.
Le nombre de possibilités vaut :
5 • 3 = 15 (principe multiplicatif)

Cela fait en tout :
15 + 15 = 30 (principe additif)

<neuf> Il résulte de <sept> et de <huit> que si le professeur veut choisir deux personnes, sans attacher d'importance au sexe, mais en attachant de l'importance à l'ordre dans lequel les élèves sont choisis, le nombre de possibilités vaut :
26 + 30 = 56 (principe additif)

Nous pouvons aussi obtenir directement ce résultat ainsi :
8 • 7 = 56 (principe multiplicatif)

<dix> Le professeur veut choisir deux personnes, dont au moins un garçon, en attachant de l'importance à l'ordre dans lequel les élèves sont choisis.
Voici deux manières de calculer le nombre de possibilités :

Méthode additive :

1 garçon, 1 fille :	30 possibilités selon <huit>
2 garçons :	6 possibilités selon <trois>
En tout :	30 + 6 = 36 possibilités

Méthode soustractive :

2 personnes :	56 possibilités selon <neuf>
2 filles :	20 possibilités selon <six>
En tout :	56 − 20 = 36 possibilités

Exercices

Exercice 1

Un code est formé d'une voyelle (a, e, i, o, u, y), suivie d'une consonne. Combien de possibilités ?

Exercice 2

Jean doit s'habiller pour sortir. Il doit mettre un pantalon et un pull. Il possède 6 pantalons et 15 pulls. Peu importe de savoir s'il met d'abord le pantalon, puis le pull, ou inversement. Combien de possibilités ?

Exercice 3

On lance en même temps une pièce de monnaie et un dé. Combien de possibilités si on ne veut pas différencier l'ordre de lecture des résultats (c-à-d « Face et 4 » revient au même que « 4 et Face ») ?

Exercice 4

Dessiner un arbre pour représenter toutes les séquences ordonnées possibles de 3 lettres différentes, en prenant seulement A, B, C. Le nombre de possibilités que vous devez trouver (principe multiplicatif) est :

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Plus généralement : une modification de l'ordre de n objets s'appelle une permutation.

On note n! le produit de tous les nombres entiers qui descendent un par un de n à 1. On appelle ce produit n factorielle ou factorielle de n.
Pour des raisons pratiques, on définit 0! = 1
n! donne le nombre de permutations de n objets différents.

Exercice 5

Calculer :

4!	6!	10!	69!	100!

Exercice 6

Résoudre :

a) $x \cdot 8! = 9!$ b) $x \cdot 12! = 15!$ c) $x \cdot 598! = 600!$

Exercice 7

La carte d'un restaurant propose une formule avec un choix de 5 entrées, 3 plats principaux et 8 desserts. Combien de possibilités pour composer son menu ?

Exercice 8

On tire deux cartes d'un jeu de 52.
a) Combien de possibilités si l'ordre est jugé différenciateur ?
b) Combien de possibilités si l'ordre n'est pas jugé différenciateur ?

Exercice 9

On lance deux pièces de monnaie.
a) Combien de possibilités si l'ordre est jugé différenciateur ? Écrire tous les résultats.
b) Combien de possibilités si l'ordre n'est pas jugé différenciateur ? Écrire tous les résultats.

Exercice 10

On lance trois pièces de monnaie.
a) Combien de possibilités si l'ordre est jugé différenciateur ? Écrire tous les résultats.
b) Combien de possibilités si l'ordre n'est pas jugé différenciateur ? Écrire tous les résultats.

Exercice 11

On lance trois dés. Combien de possibilités si l'ordre est jugé différenciateur ?

Exercice 12

a) Combien de « mots » (séquences) de 3 lettres existe-t-il ?
b) Combien de ces « mots » ont des lettres (toutes) différentes ?
c) Combien commencent par A ?
d) Combien commencent par A et ont des lettres différentes ?
e) Combien commencent par une consonne ?
f) Combien se terminent par une voyelle ?
g) Combien ne contiennent que des consonnes ?
h) Combien ne contiennent que des voyelles et toutes différentes ?
i) Combien ont au moins une lettre qui se répète ?
j) Combien ont les trois lettres identiques ?

Exercice 13

Un code est composé de 2 lettres suivies de 3 chiffres.
Exemples : **Z E 2 1 7** **A B 6 6 7** **Z Z 3 3 3**

a) Combien de ces codes existe-t-il ?
b) Combien se terminent par 5 ?
c) Combien commencent par une voyelle ?
d) Combien ne se terminent pas par 8 ?
e) Combien se terminent par 3 et commencent par Z ?
f) Combien ne contiennent que des chiffres impairs ?
g) Combien ne contiennent que des voyelles ?
h) Combien ne contiennent que des symboles différents ?

Exercice 14

On dispose des chiffres **3 4 5 6 7** pour former des nombres de 3 chiffres.
Exemples : **765** **445** **333**

a) Combien peut-on former de tels nombres si les répétitions sont permises ?
b) Combien peut-on former de tels nombres si les répétitions ne sont pas permises ?
c) Combien y a-t-il de ces nombres pairs si les répétitions sont permises ?
d) Combien y a-t-il de ces nombres pairs si les répétitions ne sont pas permises ?
e) Combien y a-t-il de multiples de 5 si les répétitions sont permises ?
f) Combien y a-t-il de multiples de 5 si les répétitions ne sont pas permises ?

Exercice 15

La numérotation structurée d'une table des matières est un arbre invisible qui cache une forêt. Dessiner l'arbre correspondant à la numérotation suivante.

1 Castor
- 1.1 Castor voyage
  - 1.1.1 Castor voyage sur terre
  - 1.1.2 Castor voyage en mer
  - 1.1.3 Castor voyage dans le ciel
- 1.2 Castor étudie chez lui

2 Pollux
- 2.1 Pollux fait l'amour
- 2.2 Pollux fait la guerre
  - 2.2.1 Pollux fait la guerre aux Perses
  - 2.2.2 Pollux fait la guerre aux Scythes
- 2.3 Pollux fait le ménage

Exercice 16

Un modèle simple, voire simpliste, emploie deux paramètres pour catégoriser le bonheur.

x = 0 si extrinsèque
x = 1 si intrinsèque

y = 0 si excité
y = 1 si calme

Représenter sous forme d'un arbre les possibilités de combiner x et y. Trouver des noms qui vous semblent convenir pour caractériser les différentes catégories.

Exercice 17

Pascal et Ioana se lancent un défi au rami. La règle est : « le premier à gagner deux parties de suite ou trois parties en tout aura droit à manger la dernière tranche de tarte aux cerises ». Dessiner un arbre qui donne tous les déroulements possibles de ce défi.

<u>Solutions</u>

1. 6•20 =120

2. 6•15 = 90

3. 2•6 = 12

4. ....

5. 4! = 24 6! = 120 10! = 3'628'800 69! = 1.71E98 100! =
933262154439441526816992388562667004907159682643816214685929638952175999
9322991560894146397615651828625369792082722375825118521091686400000000000
00000000000000

6. a) x = 9
b) x = 15•14•13 = 2'730
c) x = 600•599 = 359'400

7. 5•3•8 = 120

8. a) 52•51 = 2'652
b) 2652 / 2 = 1'326

9. Notons P pour Pile et F pour Face
a) PP, PF, FP, FF 4 possibilités
b) PP, PF, FF 3 possibilités

10. a) PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF 8 possibilités
b) PPP, PPF, PFF, FFF 4 possibilités

11. 6•6•6 = 216

12. a) 26•26•26 = 17'576
b) 26•25•24 = 15'600
c) 1•26•26 = 676
d) 1•25•24 = 600
e) 20•26•26 = 13'520
f) 26•26•6 = 4'056
g) 20•20•20 = 8'000
h) 6•5•4 = 120
i) 26•26•26 − 26•25•24 = 1'976
j) 26

13. a) 26•26•10•10•10 = 676'000
    b) 26•26•10•10•1 = 67'600
    c) 6•26•10•10•10 = 156'000
    d) 26•26•10•10•9 = 608'400
    e) 1•26•10•10•1 = 2'600
    f) 26•26•5•5•5 = 84'500
    g) 5•5•10•10•10 = 25'000
    h) 26•25•10•9•8 = 468'000

14. a) 5•5•5 = 125
    b) 5•4•3 = 60
    c) 5•5•2 = 50
    d) remplir le nombre en effectuant les choix de droite à gauche
    2•4•3 = 24
    e) 5•5•1 = 25
    f) remplir le nombre en effectuant les choix de droite à gauche
    1•4•3 = 12

15. ....

16.

extrinsèque & excité	joie
extrinsèque & calme	contentement
intrinsèque & excité	engagement
intrinsèque & calme	sérénité

17. 10 déroulements possibles.
    Finalement, Pascal et Ioana se partagent la dernière tranche de tarte aux cerises.