Combinaisons, arrangements, permutations

Qu'est-ce qu'un ensemble fini ? C'est une collection d'éléments, tous distincts, dont l'ordre est jugé non différenciateur (ce qui veut dire qu'on ne change pas un ensemble en modifiant l'ordre des éléments). Un ensemble fini E est donné en extension quand tous ses éléments sont écrits l'un à la suite de l'autre, séparés par des points-virgules et encadrés par des accolades. Sa taille est le nombre d'éléments qu'il contient.

Par exemple : E = {Atchoum ; Dormeur ; Grincheux ; Joyeux ; Prof ; Simplet ; Timide} est l'ensemble des 7 nains dans le long-métrage d'animation « Blanche-Neige et les 7 nains », sorti des studios Disney en 1937.

1. Combinaisons

Soit un ensemble E. Un nouvel ensemble formé en sélectionnant certains éléments de E s'appelle en théorie des ensembles un sous-ensemble de E ou une partie de E. En combinatoire, une partie de taille r, tirée d'un ensemble de taille n (avec r ≤ n) s'appelle une combinaison.

Le nombre des combinaisons possibles de r éléments parmi n se note C_r^n

Formule 1 : $C_r^n = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

Exemple 1.1

Reprenons E = {Atchoum ; Dormeur ; Grincheux ; Joyeux ; Prof ; Simplet ; Timide}

F = {Atchoum ; Timide} est une partie de taille 2, tirée de E.
On peut dire aussi que c'est une combinaison de 2 éléments parmi les 7 de E.
Combien y a-t-il de telles combinaisons ?

$$C_2^7 = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{7!}{2!\cdot5!} = \frac{7\cdot6}{2} = 21$$

G = {Dormeur ; Timide ; Simplet} est une partie de taille 3, tirée de E.
On peut dire aussi que c'est une combinaison de 3 éléments parmi les 7 de E.
Combien y a-t-il de telles combinaisons ?

$$C_3^7 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot4!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 35$$

Exemple 1.2

Soit E = {mais ; ou ; et ; donc ; or ; ni ; car} un ensemble de 7 conjonctions de coordination.

Les $C_2^7 = 21$ combinaisons de 2 éléments parmi les 7 de E sont les parties suivantes :

{mais ; ou}	{ou ; et}	{et ; donc}	{donc ; or}	{or ; ni}	{ni ; car}
{mais ; et}	{ou ; donc}	{et ; or}	{donc ; ni}	{or ; car}	
{mais ; donc}	{ou ; or}	{et ; ni}	{donc ; car}		
{mais ; or}	{ou ; ni}	{et ; car}			
{mais ; ni}	{ou ; car}				
{mais ; car}					

Le texte suivant met en scène chacune de ces combinaisons, à raison d'une par phrase.

Dans le ciel de naissance de l'humanité, je vois la conjonction du sentiment et de la pensée, donc je suis. Car l'imaginaire permet d'être ou de suivre. Or je ne veux pas mourir ni précéder l'essence. Mais je veux rencontrer la nature du rêve et l'inépuisable étrangeté de la nature. Donc je marche à l'ombre des livres, sur les traces des mémoires que je n'ai pas lues, car toute vie est un centon. Je me rapproche de chaque verbe ou de chaque image de verbe, or ce qui se conjugue rassemble. Parfois je me trompe : je n'emploie pas le temps juste ni la bonne personne, mais l'infinitif est suffisamment définitif pour témoigner ma reconnaissance. Je puis me reconnaître en mille et une vies, car je compte autant sur moi que sur les autres pour faire un beau voyage. Donc je suis heureux comme Ulysse, mais sans être possédé par Poséidon. Je ne crains pas les dieux ni les maîtres, car je ne les reconnais pas tant qu'ils ne reconnaissent pas leur fragilité. Seul le bonheur n'est pas fragile ni trompeur, donc facile. Mais la recherche de la simplicité complique l'art de vivre, car il faut trouver les bonnes formules d'impolitesse. Celles qui ne ménagent pas les voisins ni les autres emmerdeurs et celles qui font sourire les complices. Or la coordination de la gifle et de la caresse ne s'enseigne plus à l'école. Mais la fête commence quand l'école est finie... ou je n'ai rien compris ! Or le jeu vaut la chandelle, donc brûlons-la par les deux bouts ! Je ne veux pas tomber pile sur la Terre ni perdre la face cachée de la Lune : je veux régner sur tout l'Univers, depuis le centre ou la circonférence. Or la conférence au sommet me donne les moyens de faire pleuvoir mes centres d'intérêt sur nombre de vallées qui débordent de joie, mais il est vrai que j'abuse de la parabole. Donc de la trajectoire ou plutôt du mouvement ! Car il faut bouger pour attendre son but, or atteindre son heure est la réponse du verbe au temps. Et sept merveilles ou sept péchés lancent des ponts mobiles entre nous, drôles d'animaux que nous sommes.

*

Un sac ou un multi-ensemble est une généralisation de la notion d'ensemble. L'ordre est toujours jugé non différenciateur, mais des éléments peuvent apparaître plusieurs fois. La notation d'un sac utilise les accolades doubles. En combinatoire, un sac de taille r, obtenu en sélectionnant des éléments parmi les n d'un ensemble E, s'appelle une combinaison avec répétitions.

Le nombre des combinaisons possibles, avec répétitions,
de r éléments parmi n se note $\overline{C_r^n}$

Formule 2 : $\overline{C_r^n} = \frac{(n+r-1)!}{r!\cdot(n-1)!}$

Exemple 1.3

Soit E = {minéral ; végétal ; animal} l'ensemble des 3 règnes.

F = {{minéral ; minéral; animal}} est un sac de taille 3, tiré de E.
On peut dire aussi que F est une combinaison, avec répétitions,
de 3 éléments parmi les 3 de E
Combien y a-t-il de telles combinaisons ?

$$\overline{C_3^3} = \frac{(3+3-1)!}{3!\cdot(3-1)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

Les voici toutes :

{{minéral ; minéral ; minéral}}
{{végétal ; végétal ; végétal}}
{{animal ; animal ; animal}}
{{minéral ; minéral ; végétal}}
{{minéral ; minéral ; animal}}
{{végétal ; végétal ; minéral}}
{{végétal ; végétal ; animal}}
{{animal ; animal ; minéral}}
{{animal ; animal ; végétal}}
{{minéral ; végétal ; animal}}

Le texte suivant met en scène chacune de ces combinaisons, à raison d'une par phrase.

La parole est d'argent, le silence est d'or et le reste se paie en silex. Le loup achète la biche avec une émeraude. Contre un saphir, la vache veut bien céder sa fleur. Dans une boule de cristal, je vois danser les perles des oies. Violette, Marguerite, Églantine : vous êtes toutes les mêmes ! Vous n'avez rien dans le chou, vous ne pensez qu'à l'oseille, pauvres dindes ! Un bouc vous donne du blé, vous devenez chiennes ! À la messe : colombes ; au travail : vipères ; au lit : chattes. Pierres le matin, belladones l'après-midi, dionées la nuit. Belles plantes, météorites creuses, vous me laissez de marbre !

Complément culturel 1

Les combinaisons interviennent souvent dans les jeux. Ainsi, une main, au poker, est une combinaison (sans répétitions) de 5 cartes parmi 52. Dans le jeu du 421, avec 3 dés, on s’intéresse aux combinaisons (avec répétitions) de 3 chiffres parmi 6.

François Rabelais, dans le chapitre X de son « Cinquième livre », dénombre les combinaisons (avec répétitions) résultant du jet de deux dés. Il commet une légère erreur, puisqu’il en compte 20, alors qu’il y en a 21.

Les nombres C_r^n ont de nombreuses propriétés. Blaise Pascal les a étudiés en 1654 dans son « Traité du triangle arithmétique ».

Faire la première partie des exercices

2. Arrangements

Une liste s’inspire de l’idée d’ensemble. Mais, dans une liste, l’ordre des éléments est jugé différenciateur (ce qui veut dire qu’on change une liste en modifiant l’ordre des éléments). Comme pour les combinaisons, nous pouvons distinguer les listes sans répétitions et celles avec. On les note en extension entre des crochets. Une liste de taille r, obtenue en sélectionnant des éléments parmi les n d’un ensemble E, s’appelle un arrangement.

Le nombre d’arrangements possibles, sans répétitions,
de r éléments parmi n se note A_r^n (avec r ≤ n)

Formule 3 : $A_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Le nombre d’arrangements possibles, avec répétitions,
de r éléments parmi n se note $\overline{A_r^n}$

Formule 4 : $\overline{A_r^n} = n^r$

Exemple 2.1

Soit E = {terre ; eau ; air ; feu} l’ensemble des 4 éléments, selon le philosophe grec Empédocle.

L = [air ; feu ; eau] et M = [air ; eau ; feu] sont deux listes différentes, de taille 3, sans répétitions, tirées de E.
On peut dire aussi que ce sont des arrangements, sans répétitions, de 3 éléments parmi les 4 de E.

Combien y a-t-il de tels arrangements ?

$$A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

N = [air ; air ; eau ; air ; terre ; eau] est une liste de taille 6, avec répétitions, tirée de E
On peut dire aussi que c'est un arrangement, avec répétitions, de 6 éléments parmi les 4 de E.
Combien y a-t-il de tels arrangements ?

$$\overline{A_6^4} = 4^6 = 4096$$

Exemple 2.2

Reprenons E = {terre ; eau ; air ; feu} et écrivons les $A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$ arrangements, sans répétitions, de 2 éléments parmi les 4 de E :

[terre ; eau]	[eau ; terre]
[terre ; air]	[air ; terre]
[terre ; feu]	[feu ; terre]
[eau ; air]	[air ; eau]
[eau ; feu]	[feu ; eau]
[air ; feu]	[feu ; air]

Le texte suivant met en scène chacun de ces arrangements, à raison d'un par phrase.

Je pète le feu, je me sens libre comme l'air. Le Paradis sur terre, est-ce un loisir perpétuel de s'envoyer en l'air ? Pas de promesse en l'air, jouons avec le feu ! Pour ne pas me noyer dans un verre d'eau, j'ai besoin de changer d'air. En route pour la Terre de feu ! J'y vivrai d'amour et d'eau fraîche, je ferai feu de tout bois. La chasse en plein air, j'en ai l'eau à la bouche. Tout feu tout flamme, je goûterai les fruits de la terre. Je veux chanter sous les eaux de ciel et danser sur la terre qui tremble. On me dit tête en l'air, mais je sais garder les pieds sur terre. Pas question de rentrer sous terre ou de nager entre deux eaux ! Une femme qui a le feu au cul et qui n'a pas inventé l'eau tiède, voilà ce que je souhaite.

Exemple 2.3

Soit E = {a ; e ; i ; o ; u} un ensemble de 5 voyelles (« y » a été exclu). Il y a $\overline{A_2^5} = 5^2 = 25$ arrangements, avec répétitions, de 2 éléments parmi les 5 de E. Ce sont :

[a ; a], [a ; e], [a ; i], [a; o], [a; u]
[e ; a], [e ; e], [e ; i], [e ; o], [e ; u]
[i ; a], [i ; e], [i ; i], [i ; o], [i ; u]
[o ; a], [o ; e], [o ; i], [o ; o], [o ; u]
[u ; a], [u ; e], [u ; i], [u ; o], [u ; u]

Le texte suivant met en scène chacun de ces arrangements, à raison d'un par mot.

Comment tuer l'instant neuf, bannir l'écart futur, briser l'esprit luron qui distord tout canon moral, honnir avant l'écho l'intrus aux brûlants instincts cochons ? Avec l'Enfer !

Exemple 2.4

Soit E = {verbe ; nom}. Il y a $\overline{A_4^2}=2^4=16$ arrangements avec, répétitions, de 4 éléments parmi les 2 de E. Ce sont (en abrégeant « verbe » par v et « nom » par n) :

```
[n ; n ; n ; n], [n ; n ; n ; v], [n ; n ; v ; n], [n ; n ; v ; v],
[n ; v ; n ; n], [n ; v ; n ; v], [n ; v ; v ; n], [n ; v ; v ; v],
[v ; n ; n ; n], [v ; n ; n ; v], [v ; n ; v ; n], [v ; n ; v ; v],
[v ; v ; n ; n], [v ; v ; n ; v], [v ; v ; v ; n], [v ; v ; v ; v]
```

Le texte suivant met en scène chacun de ces arrangements, à raison d'un par phrase. La première, qui comporte 4 noms, illustre [n ; n ; n ; n] ; la seconde, qui comporte un verbe, suivi de 3 noms, illustre [v ; n ; n ; n] ; etc.

Nom d'un pieu de motel de merle ! Nous vivons une époque de sciottes, mes cochons ! La politesse claque sous les instruments de torture. Chez les jeunots, passe encore, mais chez les vioques, ça me gêne. Où va-t-on si les fossiles se mettent à jurer ? Même les Angliches – les gentlemen – causent maintenant comme des arsouilles. Je connais une duchesse qui éructe en société. C'est une rombière dont la morale se déglingue. Faudrait lui tirer les esgourdes à cette grognasse ! L'exemple doit venir du sommet. Hélas, le Daron, ce gibier de potence, nous crache dessus. La démence de l'âge le fait pleuvoir. Le verbe chute, s'écrase et pourrit. Moi qui ne veux pas choquer, je pèse mes mots. Je les choisis, je les arrange avec maniaquerie avant de vous les balancer. Et si ça vous débecte de me lire, vous pouvez tous rêver !

Complément culturel 2

Le Yi-King, un jeu divinatoire chinois élaboré au cours du premier millénaire avant JC, repose sur des arrangements (avec répétitions) de 2 symboles :
le trait plein (Yang) : —— et le trait brisé (Yin) : – –
Arrangés par 3, ils forment 8 trigrammes ; arrangés par 6, ils forment 64 hexagrammes.
Voici les trigrammes :

——	——	——	——
——	——	– –	– –
——	– –	——	– –
– –	– –	– –	– –
——	——	– –	– –
——	– –	——	– –

Application littéraire : chacun des tercets suivants transcrit un des 8 trigrammes du Yi-King selon les principes :
— un trait de type Yang donne lieu à un vers dont les substantifs sont masculins, dont la syllabe finale est masculine et dont le mètre est impair (5 syllabes) ;
— un trait de type Yin donne lieu à un vers dont les substantifs sont féminins, dont la syllabe finale est féminine et dont le mètre est pair (6 syllabes) ;
— les trois vers « riment » par contre-assonances ;
— le nom du trigramme est mentionné dès que possible dans le tercet.

Le Ciel s'est perdu,
mais le corps, pardi,
rêve du pardon.

La Terre est sur l'abscisse,
où son obéissance
écoute la grossesse.

Quand la terreur sépare
et les voix vitupèrent,
le Tonnerre a peur.

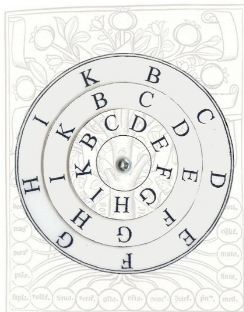
Le Vent cherche un but,
compose un stabat
que les branches débitent.

L'Eau n'est pas si tranquille.
Un plan, mais lequel ?
La sainte est dans la cale.

Le Feu : plus de trac !
Une flamme excentrique
est le meilleur truc.

Au climax du raid,
que la Montagne est rude !
Sur la face : des rides.

À l'heure où l'ombre taxe,
le Lac boit le Styx
au fond d'un vortex.



Au 13^{e} siècle, Raymond Lulle, associant des mots à des lettres qu'il dispose sur 3 cercles concentriques mobiles, élabore par des arrangements (avec répétitions) un ensemble de questions philosophiques, par exemple: la bonté est-elle grande en ce qu'elle contient des choses différentes ? Giordano Bruno reprend au 16^{e} siècle l'idée des cercles concentriques.

Un hétérogramme est un mot formé de lettres différentes. Au 17^{e} siècle, le savant jésuite suisse Paul Guldin calcule le nombre d'hétérogrammes possibles avec un alphabet de 23 lettres. Il s'agit de sommer, pour k variant de 1 à 23, les arrangements (sans répétitions) de k lettres parmi 23. On obtient environ 7E22. Guldin étudie en détail combien de livres il faudrait pour écrire tous ces mots et combien de bibliothèques pour contenir tous ces livres. Il démontre qu'avec des constructions cubiques de 432 pieds de côté, la surface terrestre ne suffirait pas. Clavius, Mersenne et Leibniz ont envisagé des problèmes du même genre.

Raymond Queneau, dans « Cent mille milliards de poèmes » (Gallimard, 1961), exploite les 10^{14} arrangements (avec répétitions) de 14 vers variant chacun dans un ensemble de 10.

Le psychologue Sternberg a imaginé un modèle simplifié de l'amour en 8 catégories, selon les arrangements (avec répétitions) de 3 paramètres (passion, intimité, engagement) variant dans un ensemble de 2 valeurs {oui ; non}.

Dans l'ADN, les 64 arrangements (avec répétitions) de 3 bases parmi 4 s'appellent des codons. Chacun code un acide aminé, sauf trois qui font stopper la synthèse de la protéine.

Faire la deuxième partie des exercices

3. Permutations

Un arrangement, sans répétitions, de tous les n éléments d'un ensemble E s'appelle une permutation de ces éléments.

Le nombre de permutations possibles se note P^n

Formule 5 : $P^n = A_n^n = n!$

Exemple 3.1

Soit E = {4 ; 6 ; 8} un ensemble à 3 éléments. Il y a $P^3 = 3! = 6$ permutations possibles de ces éléments. Ce sont :

[4 ; 6 ; 8], [4 ; 8 ; 6], [6 ; 4 ; 8], [6 ; 8 ; 4], [8 ; 4 ; 6], [8 ; 6 ; 4]

Le poème suivant met en scène chacune de ces permutations,
en prenant des vers de 4, 6 ou 8 syllabes.

T'es nul en maths,
tocard qui te dis bath !
Vil imposteur ! tu n'es qu'un fat !

Tu crois peut-être
avoir atteint le rang de maître
en te faisant connaître

auprès des intellos
pas rigolos,
dont les sermons sont des grelots.

L'esprit, c'est autre chose
que de soutenir quelques causes
qu'on te propose.

Pour penser la complexité,
apprends à mieux compter,
à permuter !

Ta philo, c'est du radotage
plein de mirages !
Les maths, ça déménage !

Exemple 3.2

Soit E = {C ; R ; A ; N ; E} un ensemble de 5 lettres. Il y a $P^5 = 5! = 120$ permutations possibles de ces éléments. Écrivons-en quelques unes sous forme de mots (anagrammes) :

ANCRE	CERNA	ECRAN	RANCE
CANER	CRANE	ENCRA	
CARNE	CRENA	NACRE	

Rappelons qu'on dit **une** anagramme : ce mot est féminin.

*

Nous pouvons aussi permuter les termes d'un sac de taille n. Les listes obtenues s'appellent des permutations avec éléments répétés.

Le nombre de permutations possibles d'un tel sac, où le 1er élément répété apparaît n_1 fois, le 2e élément répété apparaît n_2 fois, etc., se note $\overline{P^n_{n_1, n_2, \ldots}}$

Formule 6 : $\overline{P^n_{n_1, n_2, \ldots}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots}$

Exemple 3.3

Soit S = {{B ; O ; N ; O ; B ; O ; S}} un sac de 7 lettres, avec la lettre B présente 2 fois et la lettre O présente 3 fois. Il y a $\overline{P^7_{2,3}} = \frac{7!}{2! \cdot 3!} = 420$ permutations de ces éléments. En voici quelques unes sous forme d'anagrammes dépourvues de signification :

SNOBOBO
BONBOSO
SONOBOB
NOBOBOS

Exemple 3.4

Soit S = {{L ; A ; C ; O ; N ; T ; R ; A ; I ; N ; T ; E}} un sac de 12 lettres, avec la lettre A présente 2 fois, la lettre N présente 2 fois, la lettre T présente 2 fois.
Il y a $\overline{P^{12}_{2,2,2}} = \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 59'875'200$ permutations de ces éléments.

En voici quelques unes sous forme d'anagrammes :

LACONTRAINTE
ONLACRAINTET
ONLACRIETANT
ONALETRACINT
ACTONRITENLA
TRIANTENLACO
NTRANTLOIECA
RLATECANONTI
RANTLOINETCA
TOICERNANTLA
TRACEATONNIL
NOIRECLATANT
ATONLARCINTE
RECITANTONLA
CALINETONART

Traduction littéraire :

La contrainte, on la craint et on la crie tant. On a le trac intact, on rit en la triant, en la contrant. Loi écarlate, canon tirant loin, etc. À toi cernant la trace, à ton Nil noir éclatant, à ton larcin te récitant ! On l'a câliné, ton art !

<u>Exemple 3.5</u>

Chacun des nombres suivants est égal au nombre de permutations possibles des chiffres et des apostrophes qui le constituent :

31'725'945'021'352'982'400'000
91'957'651'644'391'619'486'400'000
853'740'676'447'588'582'081'228'800'000

et il n'y a pas d'autres solutions jusqu'à 30 chiffres
(j'ai écrit un programme pour les trouver)

<u>Complément culturel 3</u>

Les permutations se rencontrent un peu partout. En physique fondamentale ; dans des jeux comme le cube de Rubik ou le taquin ; en musique ; en arts visuels ; en poésie. Une permutation dite « en spirale » a permis au troubadour Arnaud Daniel d'inventer au 12^{e} siècle une forme poétique appelée « sextine », qu'illustrèrent Dante, Pétrarque, Camões, Pound, l'Oulipo.

Faire la troisième partie des exercices

4. Prolongements et rétrospective

Ce rapide tour d'horizon est bien loin d'épuiser les possibilités de l'analyse combinatoire.

Dénombrer des ensembles, des sacs, des listes ou des objets plus complexes, qui vérifient certaines conditions, peut s'avérer difficile, voire constituer des problèmes non résolus à ce jour. Par exemple, aucune formule n'a été trouvée pour dénombrer les carrés latins.

Parmi les choses connues, mentionnons :

Le dénombrement des schémas de rimes, grâce aux nombres de Stirling et de Bell.

Le problème des dérangements : permutations sans point fixe.

Les permutations autour d'une table ronde ou autour d'une table carrée (si le nombre de personnes est un multiple de 4).

Le problème des ménages : de combien de manières peut-on placer un nombre donné de couples (hétérosexuels et monogames) autour d'une table ronde, si on veut alterner hommes et femmes et ne placer aucun homme à côté de son épouse ?

Le dénombrement des graphes eulériens.

Le dénombrement des alcanes (ou hydrocarbures saturés) en chimie organique. D'un point de vue mathématique, ces molécules sont des arbres dont partent 1 ou 4 arêtes de chaque nœud.

<u>Passons en revue les objets de ce chapitre</u>

1 Ordre jugé non différenciateur

1.1 aucun élément ne peut être répété	→	C_r^n
1.2 chaque élément peut être répété, en laissant libre le nombre d'occurrences (jusqu'au maximum r)	→	$\overline{C_r^n}$
1.3 les éléments peuvent être répétés, mais les nombres d'occurrences ne sont pas tous laissés libres ni fixés à 1 chacun	→	non étudié ici

2 Ordre jugé différenciateur

2.1 aucun élément ne peut être répété	→	A_r^n	→	cas particulier n = r	→	P^n
2.2 chaque élément peut être répété, en laissant libre le nombre d'occurrences (jusqu'au maximum r)	→	$\overline{A_r^n}$				
2.3 les éléments peuvent être répétés, mais les nombres d'occurrences ne sont pas tous laissés libres ni fixés à 1 chacun	→	2.3.1 cas particulier n = r et tous les nombres d'occurrences sont fixés			→	$\overline{P_{n_1, n_2, \ldots}^n}$
		2.3.2 autres cas			→	non étudié ici

*

<u>Justification des formules</u>

Les formules 5, 3 et 4 peuvent se comprendre en imaginant l'arbre qui correspond à chacune des situations.

La formule 6 peut se comprendre en constatant que, dans une liste de taille fixe, un élément présent n_1 fois divise les possibilités par $n_1!$, c'est-à-dire par le nombre de permutations des positions qu'il occupe dans la liste.

La formule 1 peut se comprendre à partir de la formule 3 en constatant que toute partie de taille r donne, en permutant ses éléments, $r!$ listes de taille r.

Ainsi : $C_r^n \cdot r! = A_r^n$ et donc $C_r^n = \frac{A_r^n}{r!}$

La formule 2 est équivalente à : $\overline{C_r^n} = C_{n-1}^{r+n-1}$

Pour la comprendre, examinons des sacs de taille 5 construits avec les lettres a, b, c.
À côté de chaque sac, écrivons une liste (ordonnée alphabétiquement) avec des barres verticales pour marquer les transitions d'une lettre à une lettre différente. Une barre est aussi écrite pour marquer l'absence d'une lettre.

{{a ; a ; b ; c ; c}}	aa|b|cc
{{a ; a ; a ; c ; c}}	aaa||cc
{{b ; b ; c ; c ; c}}	|bb|ccc
{{c ; c ; c ; c ; c}}	||ccccc

Nous voyons que le problème se ramène à trouver les $n - 1 = 3 - 1 = 2$ emplacements possibles pour les barres dans des séquences d'une longueur $r + n - 1 = 5 + 3 - 1 = 7$.
Nous avons bien : $\overline{C_5^3} = C_2^7$

Enfin, signalons un lien entre la formule 6 et la formule 1.
Si $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n$, alors $\overline{P^n_{n_1,\, n_2,\, n_3,\, ...,\, n_k}} = C^n_{n_1} \cdot C^{n-n_1}_{n_2} \cdot C^{n-n_1-n_2}_{n_3} \cdot ... \, C^{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}_{n_k}$

<u>Exemple</u> : SUISSESSES comporte 10 lettres, qui se répartissent en 6 S, 2 E, 1 U, 1 I

$n_1 = 6$,	$n_2 = 2$,	$n_3 = 1$,	$n_4 = 1$
$n = 10$,	$n - n_1 = 4$,	$n - n_1 - n_2 = 2$,	$n - n_1 - n_2 - n_3 = 1$

$$\frac{10!}{6! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 2'520 \quad \text{ou} \quad C_6^{10} \cdot C_2^4 \cdot C_1^2 \cdot C_1^1 = 2'520$$

Cela revient à choisir d'abord 6 positions pour les S ; puis choisir, parmi les 4 positions restantes, 2 positions pour les E ; etc.

Faire la quatrième partie des exercices

5. Exercices

Première partie : exercices sur les combinaisons

Exercice 1

Blanche-Neige est terrible.
Elle aime prendre un bain
Avec trois des sept nains.
Combien de choix possibles ?

Exercice 2

Soit E = {vue ; odorat ; toucher ; goût ; ouïe} l'ensemble des 5 sens. Écrire toutes les combinaisons (sans répétitions) de 2 éléments de E parmi les 5. Composer un texte à partir de ces combinaisons.

Exercice 3

Soit E = {bleu ; blanc ; rouge} l'ensemble des couleurs du drapeau français. Écrire toutes les combinaisons (avec répétitions) de 4 éléments parmi les 3 de E.

Exercice 4

Vérifier par un calcul que le problème de dés dont parle Rabelais (voir Complément culturel 1) donne 21 combinaisons.

Exercice 5

Calculer :

C_3^7	C_{98}^{100}	C_1^{18}	C_0^{15}	C_8^{23}
$\overline{C}_3^8$	$\overline{C}_6^4$	$\overline{C}_{15}^{20}$	$\overline{C}_4^{100}$	$\overline{C}_1^n$

Exercice 6

Combien y a-t-il de possibilités de former un comité de 4 personnes à partir d'un ensemble de 20 personnes, sachant que l'ordre dans lequel sont choisies les personnes est sans importance ?

Exercice 7

Un bar propose 10 boissons. La serveuse doit en porter 4 (pas nécessairement différentes) sur son plateau (la manière de les disposer sur le plateau n'a pas d'importance). Combien de possibilités ?

Exercice 8

Combien de possibilités a-t-on de former des groupes de 5 membres avec 9 personnes ? (l'ordre n'a pas d'importance)

Exercice 9

On souhaite poster 9 lettres de poids identiques, mais on ne dispose que de 5 timbres. Combien y a-t-il de possibilités de choisir les lettres qu'on va envoyer (chaque timbre a la valeur d'affranchissement d'une seule lettre) ?

Exercice 10

De combien de manières peut-on répartir 12 chiffons (qu'on ne veut pas différencier) dans 5 tiroirs ? Indication : on forme avec les tiroirs des sacs de taille 12, où l'on fait apparaître chaque tiroir autant de fois qu'il contient de chiffons.

Exercice 11

La langue française comporte 31'000 noms communs, dont 17'000 de genre masculin et 14'000 de genre féminin. Pour réaliser l'égalité des genres, une militante de la parité souhaite transformer 1'500 noms masculins en noms féminins. Donner une formule, sans la calculer, permettant de dénombrer les possibilités d'effectuer cette opération, sachant que le changement de genre est envisageable pour n'importe quel mot.

Exercice 12

Combien y a-t-il de possibilités de former des équipes de 4 élèves et 1 professeur, s'il y a 20 élèves et 3 professeurs ? (l'ordre n'a pas d'importance)

Exercice 13

Une élève doit choisir 3 animaux qu'elle pourra emmener avec elle à l'école. Elle possède 13 animaux : 7 éléphants roses et 6 dragons.
a) De combien de façons différentes peut-elle choisir ces 3 animaux ?
b) Combien a-t-elle de choix possibles si elle désire prendre 1 dragon et 2 éléphants roses ?

Exercice 14

Un fleuriste propose 10 variétés de roses. Monsieur Martin veut acheter deux bouquets. Pour sa femme, un bouquet composé de 3 roses de variétés différentes ; pour sa maîtresse, un bouquet composé de 5 roses de variétés différentes. Déterminer le nombre de possibilités pour la paire de bouquets.

Exercice 15

Un comité (ordre sans importance) est formé en choisissant 7 personnes parmi 12, dont 3 seulement sont des Belges. Combien peut-on former de comités comprenant
a) les 3 Belges ?
b) un seul Belge ?
c) au moins un Belge ?

Exercice 16

Une classe comporte 19 élèves, dont 3 seulement sont des garçons. Le prof veut former un groupe de 7 élèves pour une expérience. L'ordre des élèves dans le groupe n'a aucune importance. De combien de manières peut-il former ce groupe
a) si le prof ne pose aucune condition ?
b) s'il veut que les trois garçons fassent partie du groupe ?
c) s'il veut que le groupe soit entièrement composé de filles ?
d) s'il veut que Bob soit le seul garçon du groupe ?
e) s'il veut qu'un seul des trois garçons fasse partie du groupe ?

Exercice 17

Combien y a-t-il de pièces dans un jeu de dominos ? Une pièce de domino comporte côte à côte 2 nombres de points, écrits de telle manière que, par exemple, le même domino donnera [3 | 5] et [5 | 3] par rotation de 180°. Chaque nombre peut varier de 0 à 6. Les répétitions sont possibles.

Exercice 18

À cause de la crise économique, l'émir Azhar 2 prend la décision de ne venir aux fêtes de Genève qu'avec 12 de ses 40 femmes.
a) Combien de possibilités a-t-il de les choisir ?
b) Ses 40 femmes se divisent en deux catégories : d'une part les épouses légitimes, au nombre de 9 ; d'autre part les concubines, au nombre de 31. Si l'émir souhaite emmener 4 épouses légitimes et 8 concubines, calculer le nombre de possibilités conformes à cette volonté.

Exercice 19

Un vendeur propose 19 tableaux, dont 3 sont de Picasso et 16 de Klee. Un collectionneur souhaite en acheter 8. Dénombrer les possibilités :
a) s'il prend 3 Picasso et 5 Klee ;
b) s'il ne prend que des Klee ;
c) s'il prend des Klee et au moins 1 Picasso.

Exercice 20

Le poker se pratique généralement avec un jeu de 52 cartes (4 couleurs : cœur, carreau, pique et trèfle, comprenant chacune les valeurs : As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi). Une « main » est une distribution de 5 cartes dont l'ordre n'a pas d'importance.
Calculer :
a) le nombre total de mains ;
b) le nombre de mains dont toutes les cartes sont de la même couleur ;
c) le nombre de mains comprenant 4 As ;
d) le nombre de mains comprenant exactement 2 valets et ne contenant aucune Dame.

Exercice 21

15 filles et 9 garçons forment la classe 3A01. Pour être plus tranquille, le professeur prend la sage décision de renvoyer d'un coup la moitié des élèves. Dénombrer les possibilités s'il veut que cette moitié :
a) comporte 3 filles et 9 garçons ;
b) ne comporte que des filles ;
c) comporte 6 filles et 6 garçons ;
d) comporte au moins un garçon ;
e) comporte au plus 5 filles.

Deuxième partie : exercices sur les arrangements

Exercice 22

Soit E = {0 ; 1} l'ensemble des 2 chiffres binaires.
a) Écrire toutes les combinaisons (avec répétitions) de 3 éléments parmi les 2 de E.
b) Écrire tous les arrangements (avec répétitions) de 3 éléments parmi les 2 de E.

Exercice 23

En utilisant exclusivement les chiffres impairs 1, 3, 5, 7 et 9, on désire former un nombre comportant 4 chiffres. Combien y a-t-il de possibilités ?

Exercice 24

Le président doit désigner un ministre de la couture, un ministre du jugement dernier et un ministre du vide intérieur. De combien de manières peut-il les choisir parmi 8 personnes ?

Exercice 25

Calculer :

A_5^{10}	A_3^{100}	A_{20}^{30}	$\overline{A}_3^8$	$\overline{A}_7^4$

Exercice 26

Un pays veut se créer un nouveau drapeau à 4 bandes verticales de couleurs différentes. Une commission a décidé que le choix des couleurs devrait s'opérer parmi 7. Déterminer le nombre de possibilités.

Exercice 27

Combien de possibilités a-t-on de ranger 4 élèves parmi 25 places ?

Exercice 28

Combien y a-t-il de possibilités pour un tiercé (dans l'ordre) avec 12 chevaux en course ?

Exercice 29

Combien de nombres (qui ne commencent pas par 0) de 5 chiffres peut-on obtenir avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, si aucun chiffre ne se répète ?

Exercice 30

Un bulletin de vote comporte 6 questions. Pour chaque question, il y a 3 réponses possibles : oui, non, vote blanc. De combien de manières un tel bulletin peut-il être rempli ?

Exercice 31

On jette 5 fois une pièce de monnaie et on note chaque fois le résultat : Pile ou Face. Combien y a-t-il de séquences possibles ?

Exercice 32

On dispose des lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I pour former des codes de 5 lettres. Dans un code, l'ordre des caractères a de l'importance.
a) Combien peut-on former de codes si les répétitions sont permises ?
b) Combien peut-on former de codes si les répétitions ne sont pas permises ?
c) Combien peut-on former de codes qui contiennent la lettre A si les répétitions ne sont pas permises ?

Exercice 33

Avec les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5, combien peut-on former
a) de nombres à 7 chiffres ?
b) de nombres à 7 chiffres commençant par 1 ?

Exercice 34

Un code est composé de trois lettres suivies de quatre chiffres.
Exemple : BUS7988
Rappel : il y a 26 lettres et 10 chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
a) Combien peut-on former de codes si les répétitions sont permises ?
b) Combien peut-on former de codes si les répétitions ne sont pas permises ?
c) Combien peut-on former de codes qui commencent par T ?
d) Combien peut-on former de codes qui se terminent par 6 et ne contiennent que des symboles différents ?
e) Combien peut-on former de codes qui commencent par AA et se terminent par 99 ?
f) Combien peut-on former de codes qui ne se terminent pas par 333 ?

Exercice 35

On tire successivement trois cartes d'un jeu de 52 cartes.
a) Combien y a-t-il de résultats possibles si, à chaque fois, on remet dans le jeu la carte tirée ?
b) Combien y a-t-il de résultats possibles si on ne remet aucune carte dans le jeu ?

Troisième partie : exercices sur les permutations

Exercice 36

Écrire toutes les anagrammes du mot TOTOT.

Exercice 37

Combien y a-t-il de possibilités de ranger 4 livres sur une étagère ?

Exercice 38

Une cordée composée de 6 alpinistes (Carlos, Eric, Fatima, Gabriel, Laureen et Zoé) est partie de Chamonix pour gravir le Mt-Blanc.
De combien de manières différentes peuvent-ils s'encorder pour cette ascension ?

Exercice 39

Nous disposons des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5 et nous voulons former un nombre de 6 chiffres sans répétitions. Combien avons-nous de possibilités ?

Exercice 40

Un photographe veut aligner 6 personnes : un Suisse, un Israélien, un Belge, un Chinois, un Palestinien et un Espagnol.
a) Dénombrer toutes les possibilités.
b) Quel est le nombre d'alignements possibles si l'Israélien et le Palestinien ne veulent pas se retrouver côte à côte ?

Exercice 41

a) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot TARMACADAMISA ?
b) Combien commencent par la lettre A ?
c) Combien ont les cinq A côte à côte ?
d) Combien ne commencent pas par T ?
e) Combien finissent par T ou par M ?

Exercice 42

On considère toutes les anagrammes chiffrées du nombre 132132132 :
a) Combien y en a-t-il ?
b) Combien sont paires ?
c) Combien sont plus grandes que 320'000'000 ?

Exercice 43

a) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ENERVEMENT ?
b) Combien commencent par la lettre E ?
c) Combien ont les quatre E côte à côte ?
d) Combien ne commencent pas par V ?
e) Combien finissent par T ou par N ?

Exercice 44

Aux 12 coups de minuit, Pascal veut faire 12 bisous à Ioana : 4 sur la bouche, 3 sur la joue gauche, 3 sur la joue droite et 2 sur le nez.
a) Combien d'ordres sont possibles ?
b) Combien d'ordres sont possibles si le premier et le dernier bisous doivent être sur la bouche ?
c) Combien d'ordres sont possibles si les 4 bisous sur la bouche doivent se faire l'un à la suite de l'autre ?

Exercice 45

Un collectionneur possède 6 crânes de chat, 4 crânes de cheval et 7 crânes de chien. De combien de manières peuvent-ils être rangés sur une étagère si les crânes d'une même catégorie animale sont placés les uns à côté des autres ?

Quatrième partie : exercices divers

Exercice 46

Une boîte comporte 30 objets, dont 10 noirs et 20 blancs. On veut sortir 7 objets. Déterminer le nombre de possibilités dans chacun des cas suivants :
a) L'ordre est important et on ne veut sortir que des objets blancs.
b) L'ordre est sans importance et on veut sortir 4 objets noirs et 3 blancs.

Exercice 47

Dans une classe de 20 élèves, chacun serre la main de tous. Combien cela fait-il de poignées de mains ?

Exercice 48

La section du lieutenant Wittwer compte 18 soldats, dont deux seulement sont des tireurs d'élite : Ignace et Isidore. Le lieutenant veut former un groupe de 5 soldats pour accomplir une mission dangereuse. L'ordre des soldats dans le groupe n'a aucune importance. De combien de manières peut-il former ce groupe
a) s'il ne pose aucune condition ?
b) s'il veut que les deux tireurs d'élite fassent partie du groupe ?
c) s'il ne veut prendre ni Ignace ni Isidore dans ce groupe ?
d) s'il veut qu'un seul des deux tireurs d'élite fasse partie du groupe ?

Exercice 49

Combien y a-t-il de possibilités d'écrire une expression algébrique avec les lettre a, b, c, d, e, f, dans n'importe quel ordre, chaque lettre n'étant prise qu'une seule fois, sachant qu'entre deux lettres doit figurer un signe + ou un signe – ?
Exemples : $d + b - f - a + c + e$
$c - d - b - e + a + f$

Exercice 50

a) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot ENSEMENCEMENT.
b) Combien commencent et se terminent par la lettre E ?
c) Combien ont les N groupés ?
d) Combien ne commencent pas par M ?

Exercice 51

On dispose des lettres de A à Z et des chiffres de 0 à 9 pour former des codes de 6 caractères.
a) Si les répétitions sont permises, combien peut-on former de codes ?
b) Si les répétitions ne sont pas permises, combien peut-on former de codes ?
c) Si les répétitions sont permises, combien peut-on former de codes qui contiennent la lettre Q ?
d) Si les répétitions ne sont pas permises, combien peut-on former de codes qui contiennent la lettre Q ?

Exercice 52

De combien de manières peut-on choisir un jury de 5 personnes parmi 9 personnes ?

Exercice 53

Combien de jurys de 3 hommes et 4 femmes peut-on former à partir de 8 hommes et de 6 femmes ?

Exercice 54

a) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ENTETEMENTS ?
b) Combien commencent par la lettre E ?
c) Combien ne commencent pas par N ?
d) Combien finissent par S ou par T ?
e) Combien ont les trois T côte à côte ?

Exercice 55

a) Combien y a-t-il de possibilités de programmer 4 examens sur une période de 8 jours, à raison d'un seul par jour ?
b) Et si le dernier examen doit obligatoirement être passé le 8^{e} jour ?

Exercice 56

a) Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former, si chaque chiffre doit être plus grand que le précédent (de gauche à droite) ?
b) Et si chaque chiffre doit être plus petit que le précédent ?

Exercice 57

Calculer le nombre de possibilités pour un tiercé avec 15 chevaux. Distinguer :
a) le tiercé dans l'ordre ;
b) le tiercé dans le désordre.

Exercice 58

D’un jeu de 36 cartes, Pierre tire 5 cartes au hasard. Jeu : (6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As) avec 4 catégories (cœur, carreau, trèfle et pique). L’ordre des 5 cartes est jugé sans importance.
a) Combien y a-t-il de donnes possibles ?
b) Combien contiennent exactement un As ?
c) Combien contiennent au moins un As ?
d) Combien contiennent au moins 3 As ?
e) Combien contiennent l’As de pique ?
f) Combien ne contiennent pas l’As de carreau ?
g) Combien contiennent 3 piques et 2 cœurs ?
h) Combien ne contiennent pas de trèfles ?
i) Combien contiennent au moins un cœur ?
j) Combien contiennent exactement un cœur ?

Exercice 59

Soient Jean, Pierre, Hugues, Anne, Chantal et Sophie : 6 personnes qui vont s’asseoir sur un banc (banc rectiligne à six places).
a) Combien y a-t-il de possibilités ?
b) Et si Jean veut être à côté de Sophie ?
c) Et si les garçons veulent être à gauche et les filles à droite ?
d) Et si les garçons veulent rester groupés ?
e) Et si les garçons veulent occuper les places paires ?
f) Et si Jean veut être placé tout à gauche du banc ?
g) Et si Jean veut être près de Sophie et à sa droite ?
h) Et si Jean ne veut pas être à côté de Chantal ?
i) Et si les personnes sont placées dans l’ordre alphabétique ?
j) Et si Pierre veut être entre Anne et Chantal ?
k) Et si Pierre ne veut pas être en bout de banc ?
l) Et si Jean, Pierre et Hugues veulent rester ensemble et dans cet ordre là ?

Exercice 60

Dans un ensemble de 25 personnes, de combien de manières peut-on en sélectionner 3 pour former un comité composé d’un président, d’un secrétaire et d’un trésorier ?

Exercice 61

Un vieillard dispose de deux bocaux de bonbons empoisonnés : des bleus et des roses. Il veut puiser dans ces bocaux pour composer des sachets de 10 bonbons, qu’il compte offrir à ses petits-enfants. Combien de sortes de sachets peut-il préparer ?

Exercice 62

a) Combien d'anagrammes du mot ANAGRAMMES existe-t-il ?
b) Combien commencent par A ?
c) Combien finissent par N ?
d) Combien commencent par M ?
e) Combien commencent par AME ?
f) Combien commencent par ANA ?
g) Combien commencent par A et finissent par S ?
h) Combien ont les voyelles au début ?
i) Combien ne commencent pas par G ?
j) Combien finissent par M ou par S ?
k) Combien ont les trois A côte à côte (groupés) ?
l) Combien ont les lettres classées dans l'ordre alphabétique ?
m) Combien commencent par A ou finissent par S ?
n) Combien commencent par RARE ?

Exercice 63

Combien y a-t-il de nombres entiers de 3 chiffres ?

Exercice 64

De combien de manières un enfant peut-il aligner 10 cubes de couleurs différentes ?

Exercice 65

D'une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires, on extrait au hasard successivement toutes les boules. On s'intéresse à l'ordre dans lequel peuvent apparaître les boules. Combien y a-t-il de possibilités si on ne distingue pas entre elles les boules d'une même couleur ?

Exercice 66

À l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10.
a) Combien de possibilités a-t-il ?
b) Combien de possibilités a-t-il s'il doit répondre aux 3 premières questions ?

Exercice 67

On désire que 5 hommes et 4 femmes s'assoient sur un banc de neuf places, de manière à ce que les femmes occupent les places paires. Combien y a-t-il de dispositions satisfaisant cette condition ?

Exercice 68

Sachant que les personnes de même nationalité s'assoient les unes à côté des autres, de combien de façons 3 Américains, 4 Français, 4 Danois et 2 Italiens peuvent-ils prendre place sur un banc ?

Exercice 69

Une Hydre à 9 têtes rencontre un Balaur à 12 têtes. De combien de manières peuvent-ils se faire des baisers sur les bouches ?

Indication : décomposer en plusieurs cas. Une bouche contre une bouche ; deux bouches contre deux bouches ; trois bouches contre trois bouches ; etc.

Exercice 70

Dénombrer les mots de longueur 4 si on dispose de 3 lettres A, 2 lettres B et 1 lettre C.

Exercice 71

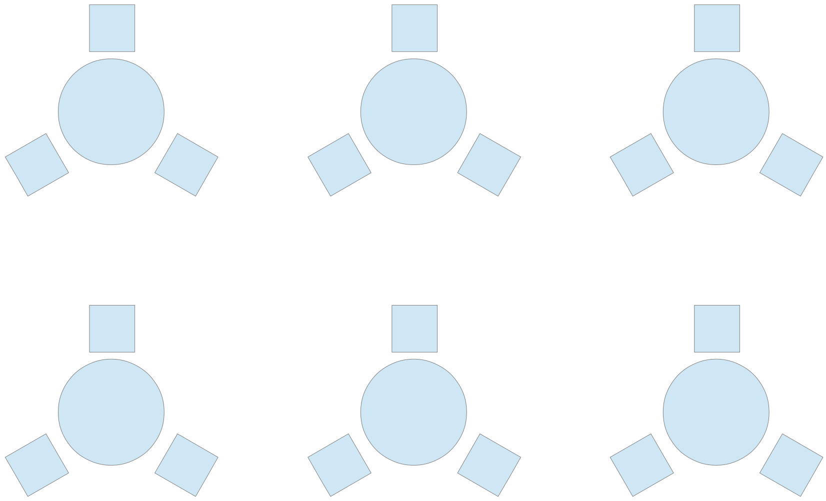
a) En face de sa classe de 20 élèves, Pascal se dit : « Je vais en tuer 7 au hasard ». Combien de choix possibles ?

b) En face de sa classe de 20 élèves, Pascal se dit : « Je ne vais en laisser vivants que 13 au hasard ». Combien de choix possibles ?

c) En déduire la formule : $C_r^n = C_{n-r}^n$

Exercice 72

Disposer de toutes les manières possibles 3 personnes A, B, C autour de cette table.



Si nous ne voulons pas différencier les dispositions qui restent les mêmes après une rotation, combien avons-nous de possibilités ?

Nous parlons alors de permutations circulaires.

Le nombre de permutations circulaires s’obtient ici en divisant 6 par ....

Généralisation : Le nombre de permutations circulaires de n objets différents vaut :

n! divisé par ...., ce qui donne ....

Exercice 73

a) 4 serpents (Bob, Jim, Luc, Max) sont dans un terrarium.Chaque bouche mord une queue. Sachant qu’un serpent peut mordre sa propre queue ou celle d’un autre serpent, dénombrer toutes les configurations possibles.

b) On ajoute un 5^{e} serpent (Tom) dans le terrarium. Et maintenant, chaque serpent mord une autre queue que la sienne. Dénombrer toutes les configurations possibles.

Exercice 74

a) De combien de manières peuvent rimer ou ne pas rimer les vers d'une strophe de 3 vers (tercet) ?
b) Même question avec 4 vers (quatrain).
c) Généralisation : avec j vers, la réponse est le j^e^ nombre de Bell, noté B_j.
Dans l'exercice 73 a), il y avait B_4 cas de figures à considérer.
Les B_5 = 52 manières de rimer ou de ne pas rimer les vers d'une strophe de 5 vers (cinquain ou quintil) sont représentés par des diagrammes dans un classique de la littérature japonaise : « Le Dit de Genji », écrit vers l'an 1000 par Madame Murasaki Shikibu.
Il y a plusieurs manières de calculer les nombres de Bell (nous ne les donnerons pas ici).

Exercice 75

Enfin, en guise de clin d'œil au « Bourgeois gentilhomme » de Molière, parmi les permutations des 4 éléments de la phrase suivante :

vos yeux	me font	mourir	d'amour
1	2	3	4

trouver toutes celles qui ne laissent aucun élément à sa place d'origine.

De telles permutations s'appellent des dérangements.

Le nombre de dérangements de n éléments s'appelle la sous-factorielle de n.

On la note !n

La formule suivante permet son calcul :

$$!n = n! \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

on peut aussi l'obtenir grâce à une relation de récurrence :

$$!1 = 0 \quad \text{et} \quad !n = n \cdot \{!(n-1)\} + (-1)^n$$

Solutions

1. $C_3^7 = 35$

2.

{vue ; odorat} {vue ; toucher} {vue ; goût} {vue ; ouïe}	{odorat ; toucher} {odorat ; goût} {odorat ; ouïe}	{toucher ; goût} {toucher ; ouïe}	{goût ; ouïe} $C_2^5 = 10$

3. Pour faire plus court, j'emploie le code : eu = bleu, an = blanc, ou = rouge

{{eu ; eu ; an ; ou}} {{an ; an ; eu ; ou}} {{ou ; ou ; an ; eu}}	{{eu ; eu ; eu ; an}} {{eu ; eu ; eu ; ou}} {{an ; an ; an ; eu}} {{an ; an ; an ; ou}} {{ou ; ou ; ou ; an}} {{ou ; ou ; ou ; eu}}	{{an ; an ; an ; an}} {{eu ; eu ; eu ; eu}} {{ou ; ou ; ou ; ou}}	{{eu ; eu ; an ; an}} {{eu ; eu ; ou ; ou}} {{an ; an ; ou ; ou}} $\overline{C_4^3} = 15$

4. $\overline{C_2^6} = 21$

5. $C_3^7 = 35$ $C_{98}^{100} = 4'950$ $C_1^{18} = 18$ $C_0^{15} = 1$ $C_8^{23} = 490'314$
$\overline{C_3^8} = 120$ $\overline{C_6^4} = 84$ $\overline{C_{15}^{20}} = 1'855'967'520$ $\overline{C_4^{100}} = 4'421'275$ $\overline{C_1^n} = n$

6. $C_4^{20} = 4'845$

7. $\overline{C_4^{10}} = 715$

8. $C_5^9 = 126$

9. $C_5^9 = 126$

10. $\overline{C_{12}^5} = 1'820$

11. C_{1500}^{17000}

12. $C_4^{20} \cdot C_1^3 = 14'535$

13. a) $C_3^{13} = 286$ b) $C_1^6 \cdot C_2^7 = 126$

14. $C_3^{10} \cdot C_5^{10} = 30'240$

15. a) $C_3^3 \cdot C_4^9 = 126$ b) $C_1^3 \cdot C_6^9 = 252$ c) $C_7^{12} - C_7^9 = 756$

16. a) $C_7^{19}=50'388$
b) $C_3^3 \cdot C_4^{16}=1'820$
c) $C_7^{16}=11'440$
d) $C_1^1 \cdot C_6^{16}=8'008$
e) $C_1^3 \cdot C_6^{16}=24'024$

17. $\overline{C_2^7}=28$

18. a) $C_{12}^{40}=5'586'853'480$ b) $C_4^9 \cdot C_8^{31}=993'979'350$

19. a) $C_3^3 \cdot C_5^{16}=4'368$ b) $C_8^{16}=12'870$ c) $C_8^{19}-C_8^{16}=62'712$

20. a) $C_5^{52}=2'598'960$
b) $C_1^4 \cdot C_5^{13}=5'148$
c) $C_4^4 \cdot C_1^{48}=48$
d) $C_2^4 \cdot C_3^{44}=79'464$

21. a) $C_3^{15} \cdot C_9^9=455$
b) $C_{12}^{15}=455$
c) $C_6^{15} \cdot C_6^9=420'420$
d) $C_{12}^{24}-C_{12}^{15}=2'703'701$
e) $C_9^9 \cdot C_3^{15}+C_8^9 \cdot C_4^{15}+C_7^9 \cdot C_5^{15}=120'848$

22.

a)	b)	
001	000	100
110	001	101
000	010	110
111	011	111

23. $\overline{A_4^5}=5^4=625$

24. $A_3^8=336$

25. $A_5^{10}=30'240$ $A_3^{100}=970'200$ $A_{20}^{30}=7.3\text{E}25$ $\overline{A_3^8}=512$
$\overline{A_7^4}=16'384$

26. $A_4^7=840$

27. $A_4^{25}=303'600$

28. $A_3^{12} = 1'320$

29. $A_5^5 - A_4^4 = 96$

30. $\overline{A_6^3} = 3^6 = 729$

31. $\overline{A_5^2} = 2^5 = 32$

32. a) $\overline{A_5^9} = 9^5 = 59'049$ b) $A_5^9 = 15'120$ c) $A_5^9 - A_5^8 = 8'400$ ou $5 \cdot A_4^8$

33. a) $\overline{A_7^5} = 5^7 = 78'125$ b) $\overline{A_6^5} = 5^6 = 15'625$

34. a) $\overline{A_3^{26}} \cdot \overline{A_4^{10}} = 26^3 \cdot 10^4 = 175'760'000$
b) $A_3^{26} \cdot A_4^{10} = 78'624'000$
c) $\overline{A_2^{26}} \cdot \overline{A_4^{10}} = 26^2 \cdot 10^4 = 6'760'000$
d) $A_3^{26} \cdot A_3^9 = 7'862'400$
e) $\overline{A_1^{26}} \cdot \overline{A_2^{10}} = 26^1 \cdot 10^2 = 2'600$
f) $\overline{A_3^{26}} \cdot \overline{A_4^{10}} - \overline{A_3^{26}} \cdot \overline{A_1^{10}} = 26^3 \cdot 10^4 - 26^3 \cdot 10^1 = 175'584'240$

35. a) $\overline{A_3^{52}} = 52^3 = 140'608$ b) $A_3^{52} = 132'600$

36.

OOTTT OTOTT OTTOT OTTTO	TOOTT TOTOT TOTTO	TTOOT TTOTO	TTTOO $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

37. $P^4 = 4! = 24$

38. $P^6 = 6! = 720$

39. $P^6 - P^5 = 6! - 5! = 600$

40. a) $P^6 = 6! = 720$
b) $P^6 - P^5 \cdot P^2 = 6! - 5! \cdot 2! = 480$

41. 13 lettres, dont 5A et 2M

a) $\frac{13!}{5!\cdot 2!}=25'945'920$

b) $\frac{12!}{4!\cdot 2!}=9'979'200$

c) $\frac{9!}{2!}=181'440$

d) $\frac{13!}{5!\cdot 2!}-\frac{12!}{5!\cdot 2!}=23'950'080$

e) $\frac{12!}{5!\cdot 2!}+\frac{12!}{5!}=5'987'520$

42. a) $\frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!}=1'680$

b) doit finir par 2 $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}=560$

c) doit commencer par 32 $\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=210$

43. 10 lettres, dont 4E et 2N

a) $\frac{10!}{4!\cdot 2!}=75'600$

b) $\frac{9!}{3!\cdot 2!}=30'240$

c) $\frac{7!}{2!}=2'520$

d) $\frac{10!}{4!\cdot 2!}-\frac{9!}{4!\cdot 2!}=68'040$

e) $\frac{9!}{4!\cdot 2!}+\frac{9!}{4!}=22'680$

44. a) $\frac{12!}{4!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 2!}=277'200$

b) $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 2!}=25'200$

c) $\frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}=5'040$

45. $P^3\cdot P^6\cdot P^4\cdot P^7=3!\cdot 6!\cdot 4!\cdot 7!=522'547'200$

46. a) $A_7^{20}=390'700'800$ b) $C_4^{10}\cdot C_3^{20}=239'400$

47. $C_2^{20}=190$

48. a) $C_5^{18}=8'568$
b) $C_2^2 \cdot C_3^{16}=560$
c) $C_5^{16}=4'368$
d) $C_1^2 \cdot C_4^{16}=3640$

49. $P^6 \cdot \overline{A_5^2}=6! \cdot 2^5=23'040$

50. 13 lettres, dont 5E, 2M et 3N
a) $\frac{13!}{5! \cdot 2! \cdot 3!}=4'324'320$
b) $\frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 3!}=554'400$
c) $\frac{11!}{5! \cdot 2!}=166'320$
d) $\frac{13!}{5! \cdot 2! \cdot 3!}-\frac{12!}{5! \cdot 3!}=3'659'040$

51. a) $\overline{A_6^{36}}=36^6=2'176'782'336$
b) $A_6^{36}=1'402'410'240$
c) $\overline{A_6^{36}}-\overline{A_6^{35}}=36^6-35^6=338'516'711$
d) $A_6^{36}-A_6^{35}=233'735'040$

52. $C_5^9=126$

53. $C_3^8 \cdot C_4^6=840$

54. 11 lettres, dont 4E, 2N et 3T
a) $\frac{11!}{4! \cdot 2! \cdot 3!}=138'600$
b) $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 3!}=50'400$
c) $\frac{11!}{4! \cdot 2! \cdot 3!}-\frac{10!}{4! \cdot 3!}=113'400$
d) $\frac{10!}{4! \cdot 2! \cdot 3!}+\frac{10!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}=50'400$
e) $\frac{9!}{4! \cdot 2!}=7'560$

55. a) $C_4^8=70$ b) $C_3^7=35$

56. a) $C_4^9=126$ b) $C_4^{10}=210$

57. a) $A_3^{15}=2'730$ b) $C_3^{15}=455$

58. a) $C_5^{36}=376'992$
b) $C_1^4 \cdot C_4^{32}=143'840$
c) $C_5^{36}-C_5^{32}=175'616$
d) $C_3^4 \cdot C_2^{32}+C_4^4 \cdot C_1^{32}=2'016$
e) $C_1^1 \cdot C_4^{35}=52'360$
f) $C_5^{35}=324'632$
g) $C_3^9 \cdot C_2^9=3'024$
h) $C_5^{27}=80'730$
i) $C_5^{36}-C_5^{27}=296'262$
j) $C_1^9 \cdot C_4^{27}=157'950$

59. a) $P^6=6!=720$
b) $P^5 \cdot P^2=5! \cdot 2!=240$
c) $P^3 \cdot P^3=3! \cdot 3!=36$
d) $P^4 \cdot P^3=4! \cdot 3!=144$
e) $P^3 \cdot P^3=3! \cdot 3!=36$
f) $P^5=5!=120$
g) $P^5=5!=120$
h) $P^6-P^5 \cdot P^2=6!-5! \cdot 2!=480$
i) 1
j) $2 \cdot P^4=2 \cdot 4!=48$
k) $P^6-2 \cdot P^5=6!-2 \cdot 5!=480$
l) $P^4=4!=24$

60. $A_3^{25}=13'800$

61. $\overline{C_{10}^2}=11$

62. 10 lettres, dont 3A et 2M
a) $\dfrac{10!}{3! \cdot 2!}=302'400$
b) $\dfrac{9!}{2! \cdot 2!}=90'720$
c) $\dfrac{9!}{3! \cdot 2!}=30'240$
d) $\dfrac{9!}{3!}=60'480$
e) $\dfrac{7!}{2!}=2'520$
f) $\dfrac{7!}{2!}=2'520$
g) $\dfrac{8!}{2! \cdot 2!}=10'080$

h) $\frac{4!}{3!} \cdot \frac{6!}{2!} = 1'440$

i) $\frac{10!}{3! \cdot 2!} - \frac{9!}{3! \cdot 2!} = 272'160$

j) $\frac{9!}{3!} + \frac{9!}{3! \cdot 2!} = 90'720$

k) $\frac{8!}{2!} = 20'160$

l) 1

m) commençant par A $\frac{9!}{2! \cdot 2!}$

finissant par S $\frac{9!}{3! \cdot 2!}$

commençant par A et finissant par S $\frac{8!}{2! \cdot 2!}$

en tout $\frac{9!}{2! \cdot 2!} + \frac{9!}{3! \cdot 2!} - \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 110'880$

n) 0

63. Ce sont les nombres de 100 à 999. Il y en a 999 − 99 = 900.

64. $P^{10} = 10! = 3'628'800$

65. $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

66. a) $C_8^{10} = 45$ b) $C_5^7 = 21$

67. $P^4 \cdot P^5 = 4! \cdot 5! = 2'880$

68. $P^4 \cdot P^3 \cdot P^4 \cdot P^4 \cdot P^2 = 4! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2! = 165'888$

69. $\sum_{j=1}^{9} C_j^9 \cdot C_j^{12} \cdot P^j = 472'630'860$

70.

3A, 1B, 0C $\frac{4!}{3!} = 4$

3A, 0B, 1C $\frac{4!}{3!} = 4$

2A, 2B, 0C $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

2A, 1B, 1C $\frac{4!}{2!} = 12$

1A, 2B, 1C $\frac{4!}{2!} = 12$ En tout 38

71. a) $C_7^{20} = 77'520$
b) $C_{13}^{20} = 77'520$
c) tuer r personnes parmi n
revient au même que
laisser vivantes n − r personnes parmi n

72. 2 permutations circulaires de 3 personnes = $\frac{P^3}{3}$

Généralisation $\frac{P^n}{n} = (n-1)!$

73.

a)

1 possibilité de
(1 cycle de 4) (4 − 1)! = 3! = 6

4 possibilités de
(1 cycle de 3 & 3 cycles de 1) 4*2!*0! = 8

6 possibilités de
(1 cycle de 2 & 2 cycles de 1) 6

3 possibilités de
(2 cycles de 2) 3

1 possibilité de
(4 cycles de 1) 1

Total 24

b)

1 possibilité de
(1 cycle de 5) (5 − 1)! = 4! = 24

10 possibilités de
(1 cycle de 2 + 1 cycle de 3) 10*1!*2! =20

Total 44

74. Réponse sous forme de poème

Combien de systèmes de rimes,
De l’emploi de vers monorimes
À l’abandon de toute rime,

Est-il possible d’appliquer
À une strophe de j vers ?
Le résultat est compliqué :

Il s’agit – et je suis formel –
Du j-ème nombre de Bell
(Étudiez la combinatoire !).

Il est à croissance rapide :
Il vaut quinze pour un quatrain,
Cinquante-deux pour un cinquain.

Pour un tercet, voyez vous-même !
Le décompte est vraiment facile,
Si vous m’avez lu jusque là.

75.

me font vos yeux d’amour mourir
me font mourir d’amour vos yeux
me font d’amour vos yeux mourir
mourir vos yeux d’amour me font
mourir d’amour vos yeux me font
mourir d’amour me font vos yeux
d’amour vos yeux me font mourir
d’amour mourir vos yeux me font
d’amour mourir me font vos yeux