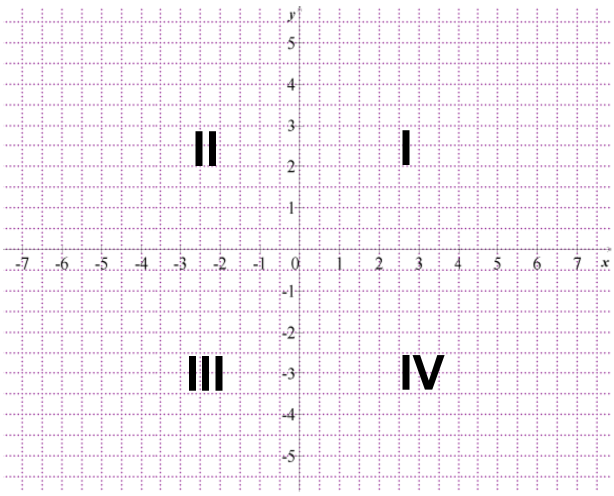
Droites dans un repère cartésien



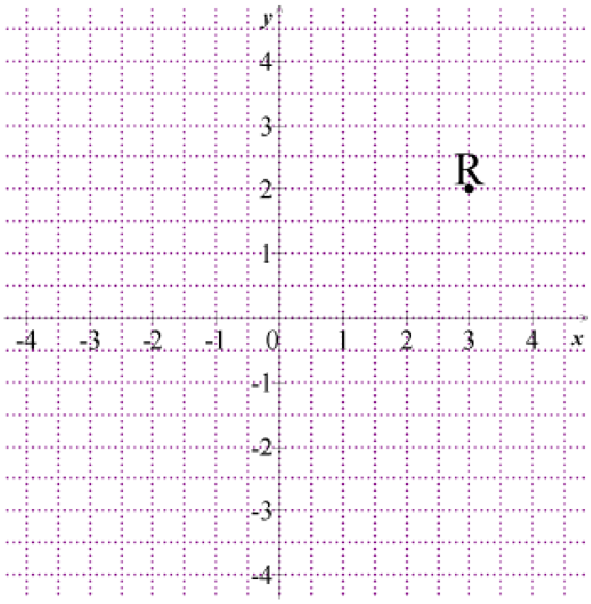
Un <u>repère cartésien</u> est formé de deux axes gradués, généralement perpendiculaires.

Les graduations sur l'axe horizontal s'appellent les <u>abscisses</u>, généralement notées x.

Les graduations sur l'axe vertical s'appellent les <u>ordonnées</u>, généralement notées y.

On distingue quatre régions I, II, III et IV, nommées <u>quadrants</u>.

Tout point du plan est repéré par une abscisse et une ordonnée.



Le point R a pour abscisse 3
et pour ordonnée 2.

On le note :

R=<3 ; 2> ou R = (3 ; 2) ou R(3 ; 2)

Soit R= <x_R ; y_R>

Si R est dans le quadrant I, alors $x_R \geq 0$ et $y_R \geq 0$
Si R est dans le quadrant II, alors $x_R \leq 0$ et $y_R \geq 0$
Si R est dans le quadrant III, alors $x_R \leq 0$ et $y_R \leq 0$
Si R est dans le quadrant IV, alors $x_R \geq 0$ et $y_R \leq 0$

Exercice 1

Représenter les points suivants dans un repère cartésien et préciser le ou les quadrants dans lesquels ils sont situés.

A = <2 ; 3>	B = (3 ; −2)	C(−4 ; −3)	D = <0 ; 5>
E = (−2.5 ; 4.5)	F = (4 ; 0)	G(1;1)	H = <−2 ; 0>
I = <0 ; −1.5>	J = (−2 ; −2)	K = <0 ; 0>	L = <5 ; −1>

*

Considérons un segment de droite reliant les point R = <x_R ; y_R> et S = <x_S ; y_S>.

La longueur du segment RS vaut : $\sqrt{(x_S - x_R)^2 + (y_S - y_R)^2}$.

Exemple 1

R = <1 ; 3> S = <6 ; 5>

$$\overline{RS} = \sqrt{(6-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5.385$$

Exercice 2

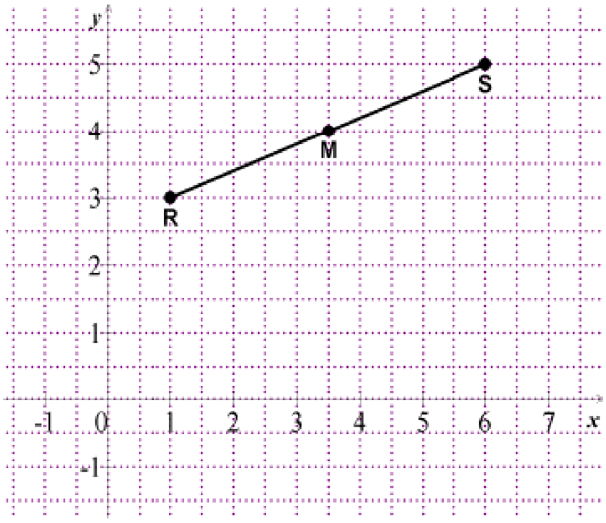
Représenter sur un repère cartésien les points A = <3 ; 4>, B = <−2 ; 1> et C = <5 ; −3>.
Calculer le périmètre du triangle ABC.
Facultatif : Regarder sur internet la formule de Héron et l'appliquer pour calculer l'aire de ce triangle.

*

Considérons un segment de droite reliant les point $R = <x_R ; y_R>$ et $S = <x_S ; y_S>$.

Le <u>milieu du segment RS</u> est le point : $M_{RS} = \langle \frac{x_R + x_S}{2} ; \frac{y_R + y_S}{2} \rangle$

<u>Exemple 2</u>



R = <1 ; 3> S = <6 ; 5>

$M = \langle \frac{1+6}{2} ; \frac{3+5}{2} \rangle$ = <3.5 ; 4>

<u>Exercice 3</u>

Reprendre le triangle ABC de l'exercice 2. Calculer le milieu de chacun des trois segments qui le composent. Soient M_{AB} le milieu du segment AB et M_{BC} le milieu du segment BC. Vérifier que la longueur du segment $M_{AB}M_{BC}$ vaut la moitié de la longueur du segment AC.

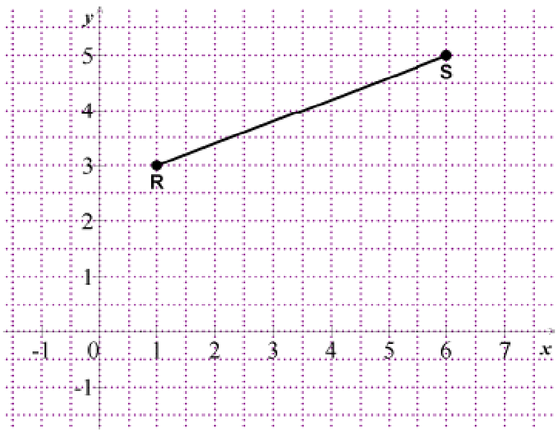
*

Considérons un segment de droite reliant les point R = <x_R ; y_R> et S = <x_S ; y_S>
Supposons que ce segment n'est pas vertical, c-à-d $x_R \neq x_S$.

La <u>pente du segment RS</u> est le rapport : p_{RS} = $\frac{y_S - y_R}{x_S - x_R}$

(ou $\frac{y_R - y_S}{x_R - x_S}$, ce qui donne le même résultat)

<u>Exemple 3</u>



R = <1 ; 3>   S = <6 ; 5>

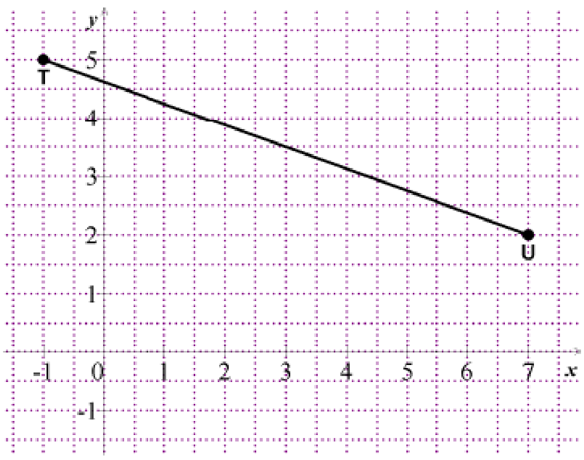
p_{RS} = $\frac{5-3}{6-1}=\frac{2}{5}=0.4$

La pente est <u>positive</u> quand le segment « monte », c-à-d quand le point situé à droite est plus haut que le point situé à gauche.

La pente est <u>négative</u> quand le segment « descend », c-à-d quand le point situé à droite est plus bas que le point situé à gauche.

Dans l'exemple 3, la pente est positive.

<u>Exemple 4</u>



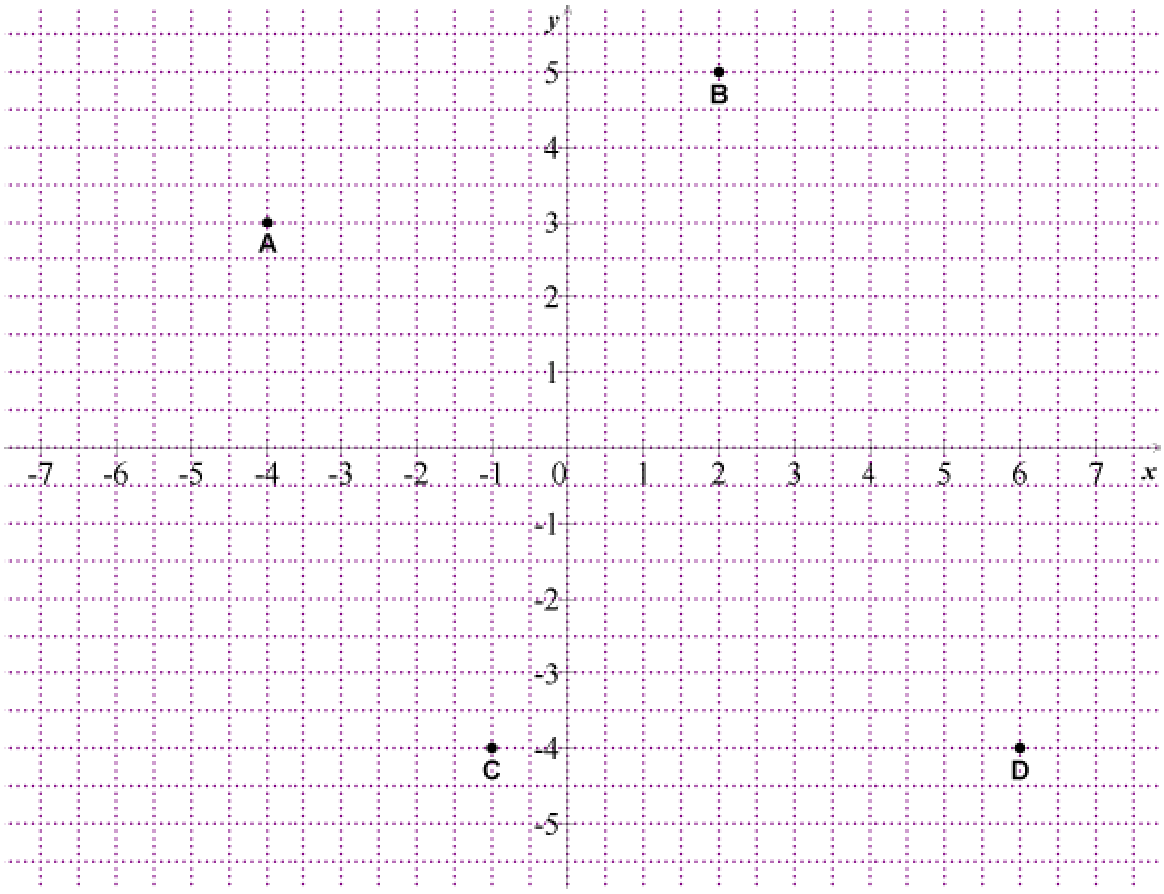
Ici la pente est négative

T = <−1 ; 5>   U = <7 ; 2>

p_{TU} = $\frac{2-5}{7-(-1)}=\frac{-3}{8}=-0.375$

Exercice 4

Soient A, B, C, D donnés dans un repère cartésien.
Calculer p_{AB}, p_{AC}, p_{AD}, p_{BC}, p_{BD}, p_{CD}.



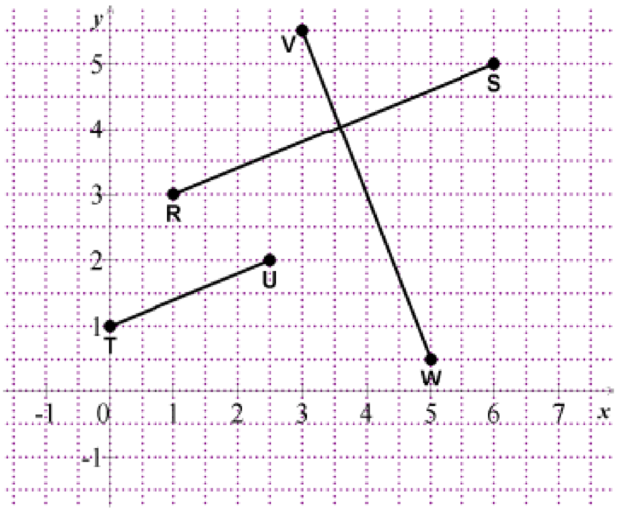
*

Soient deux segments non verticaux RS et TU.

RS et TU sont <u>parallèles</u> si et seulement si $p_{RS} = p_{TU}$

RS et TU sont <u>perpendiculaires</u> si et seulement si $p_{RS} \bullet p_{TU} = -1$

<u>Exemple 5</u>



R = <1 ; 3> S = <6 ; 5>

$p_{RS} = \frac{5-3}{6-1} = \frac{2}{5} = 0.4$

T = <0 ; 1> U = <2.5 ; 2>

$p_{TU} = \frac{2-1}{2.5-0} = \frac{1}{2.5} = 0.4$

$p_{RS} = p_{TU}$ RS et TU parallèles

V = <3 ; 5.5> W = <5 ; 0.5>

$p_{VW} = \frac{0.5-5.5}{5-3} = \frac{-5}{2} = -2.5$

$p_{RS} \bullet p_{VW} = 0.4 \bullet (-2.5) = -1$

RS et VW perpendiculaires

<u>Exercice 5</u>

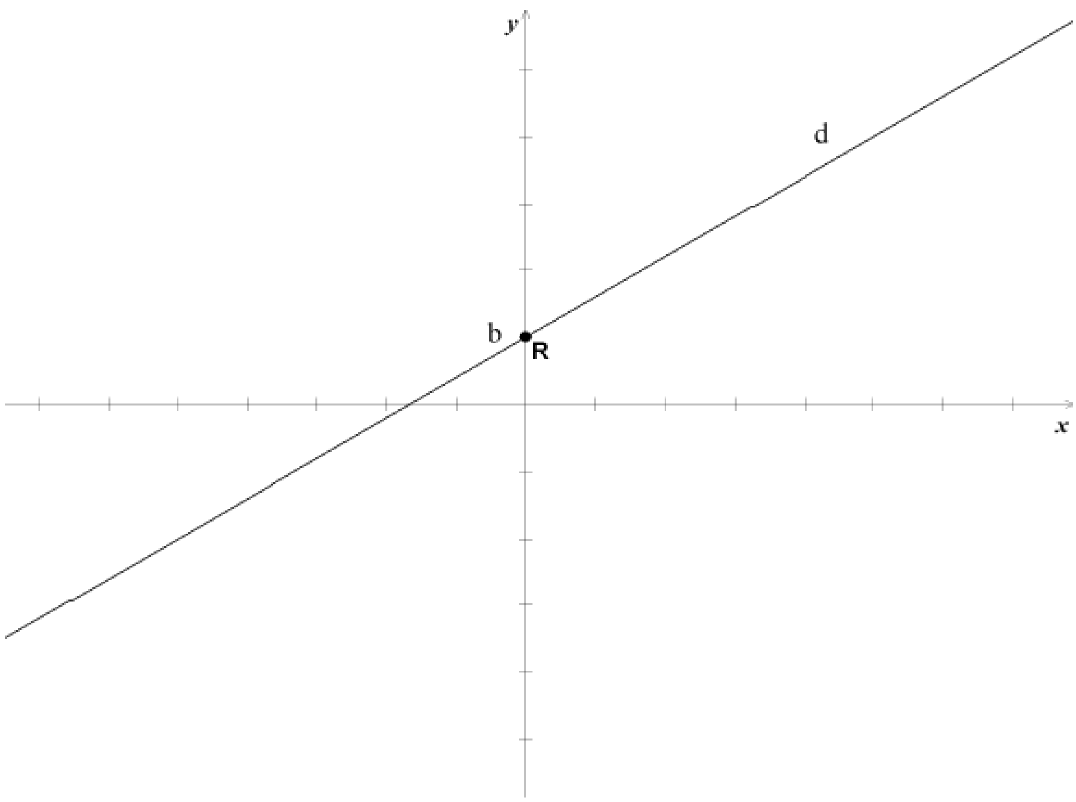
Soient les points :

A = <−3 ; 1> B = <4 ; −2>
C = <0 ; −6> D = <1.5 ; −2.5>
E = <−1 ; 4> F = <4.25 ; 1.75>

Représenter ces points sur un graphique et vérifier par calcul
que AB est perpendiculaire à CD
et que AB est parallèle à EF

*

Considérons une droite d non verticale dans un repère cartésien.
Notons R = <0 ; b> le point d'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées.
La valeur de b s'appelle l'ordonnée à l'origine.



On peut définir la pente de cette droite comme la pente de n'importe quel segment contenu dans cette droite (le théorème des triangles semblables nous permet de savoir que le résultat sera le même pour tous les segments).

Notons la pente de la droite : a

Envisageons un point T = <x ; y> qui peut se déplacer sur toute la droite.

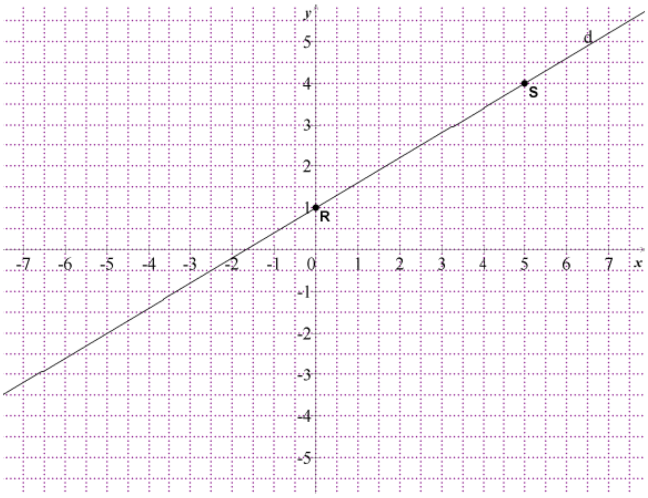
La pente du segment RT vaut : $\frac{y-b}{x-0}=\frac{y-b}{x}$

Et puisque nous avons décidé d'appeler cette pente : a, nous avons l'égalité :

$\frac{y-b}{x}=a$ que nous pouvons transformer en $y-b=a\,x$, puis en $y=a\,x+b$.

La forme $y=a\,x+b$ s'appelle l'équation cartésienne réduite de la droite d.

Exemple 6



Cette droite a pour ordonnée à l'origine :
b = 1

Sa pente est celle du segment RS (par exemple), c-à-d :
a = $\frac{4-1}{5-0}=\frac{3}{5}=0.6$

Donc son équation cartésienne réduite est :
$y=0.6x+1$

Tout point dont les coordonnées vérifient l'équation d'une droite d est un point de cette droite d.

Tout point dont les coordonnées ne vérifient pas l'équation d'une droite d n'est pas un point de cette droite d.

Exemple 7

Reprenons la droite d de l'exemple 6, dont l'équation est : $y=0.6x+1$

<3 ; 2.8> est un point de d, parce que 2.8 = 0.6•3 + 1
<−1 ; 0.4> est un point de d, parce 0.4 = 0.6•(−1) + 1
<−1.7 ; 0> n'est pas un point de d, parce que 0 ≠ 0.6•(−1.7) + 1 = −0.02
<99 ; 60.4> est un point de d, parce que 60.4 = 0.6•99 + 1
<564.9 ; 340> n'est pas un point de d, parce que 340 ≠ 0.6•564.9 + 1 = 339.94

Exercice 6

Considérons la droite d qui contient le segment RS avec R = <0 ; 2.5> et S = <5 ; −4.5>.

a) Représenter graphiquement la droite d.

b) Donner l'équation cartésienne réduite de la droite d.

c) Pour chacun des points suivants, dire s'il est ou non un point de d :

A = <1 ; 1.1>	B = <−2 ; 5.3>	C = <1.8 ; 0>	D = <4 ; −3.1>
E = <6 ; −6>	F = <78 ; −106.7>	E = <59 ; −80>	G = <−99 ; 141.1>

<u>Comment représenter graphiquement une droite d'équation donnée ?</u>

Il suffit de calculer deux points vérifiant cette équation et de tracer la droite contenant ces deux points.

<u>Exemple 8</u>

Soit la droite d d'équation $y=\frac{5}{3}x+2$

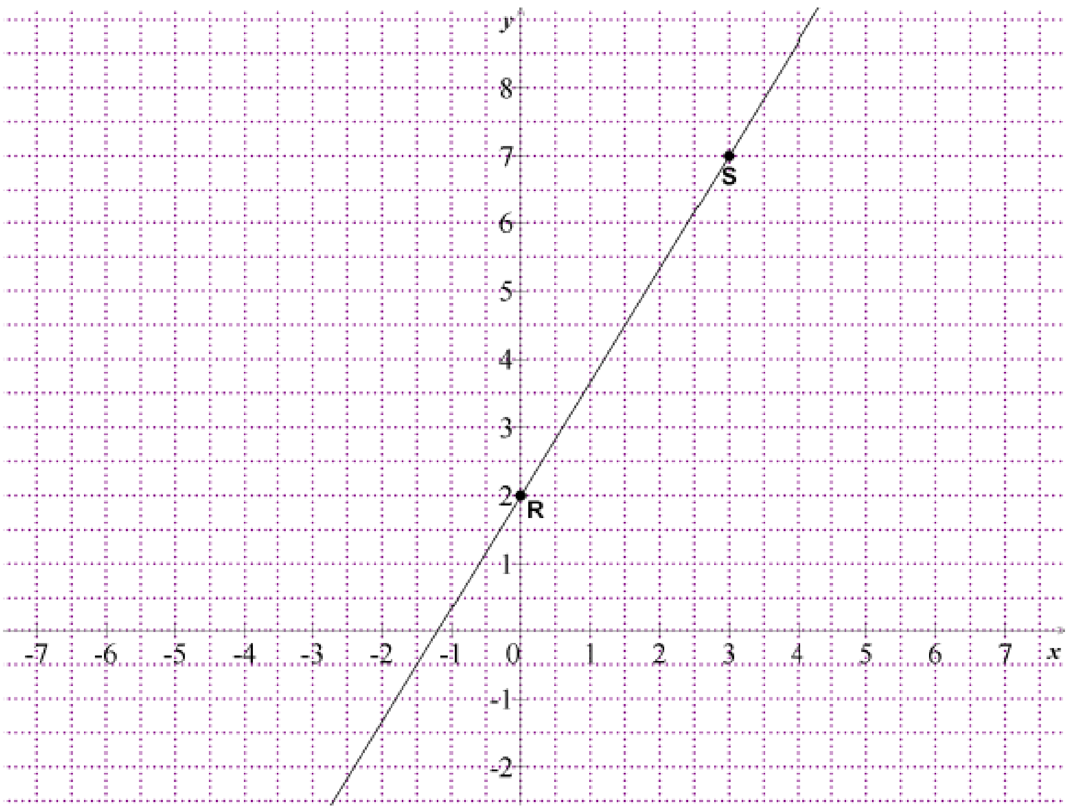
Un point facile à calculer est celui d'abscisse 0 :

Si $x=0$, alors $y=\frac{5}{3}\cdot 0+2=2$, donc R = <0 ; 2> est un point de d

Pour trouver un deuxième point de coordonnées entières, prenons une valeur de x qui soit un multiple de 3, de manière à obtenir un nombre entier lors de la multiplication par $\frac{5}{3}$:

Si $x=3$, alors $y=\frac{5}{3}\cdot 3+2=7$, donc S = <3 ; 7> est un point de d

Plaçons R et S sur un graphique et traçons la droite contenant ces points :



Cas particuliers : les droites horizontales et verticales

L'équation d'une droite horizontale est celle d'une droite de pente nulle. Elle se réduit à :

$$y=b$$

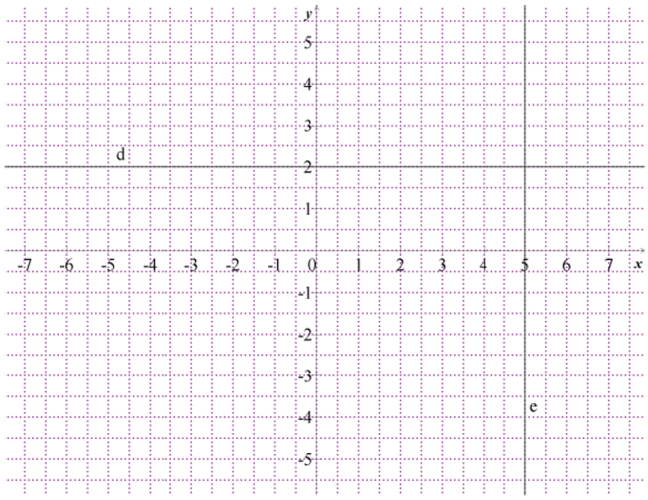
La forme $y=ax+b$ n'est pas valable pour une droite verticale. Mais, par analogie avec les droites horizontales, l'équation d'une droite verticale est :

$$x=c$$

Exemple 9

Droite d : $y=2$

droite e : $x=5$



Exercice 7

Représenter graphiquement les droites suivantes :

d :	$y=2x+3$	e :	$y=\frac{3}{2}x-4$
f :	$y=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}$	g :	$y=-1.5x-0.5$
h :	$y=-2+1.2x$	i :	$y=-3$
j :	$x=-4$	k :	$y=-x$
l :	$y=\frac{-5x+6}{2}$	m :	$-7x+3y+6=0$
n :	$\frac{x}{2}+y-5=0$	o :	$-x-\frac{y}{3}+0.5=0$

Comment trouver l'équation cartésienne réduite d'une droite dont la représentation graphique est donnée ?

1er cas : Si la valeur de l'ordonnée à l'origine est claire (nombre entier ou demi-entier), nous connaissons immédiatement b. Il faut alors choisir un autre point S = <x_S ; y_S> sur la droite, dont les coordonnées sont claires.

Et la pente vaut : a = $\frac{y_S - b}{x_S}$

Avec la pente a et l'ordonnée à l'origine b, nous pouvons écrire l'équation $y = a\,x + b$

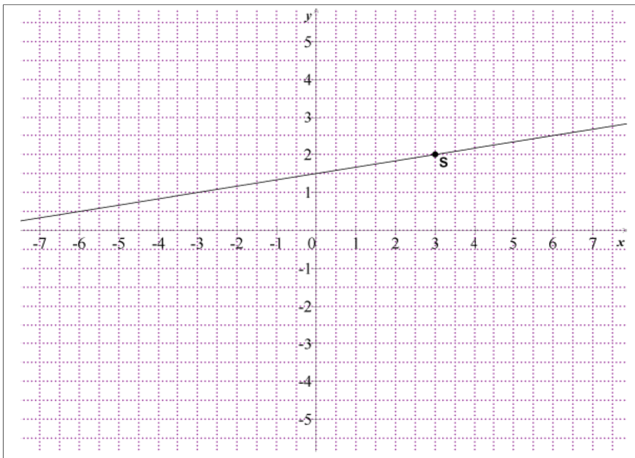
2e cas : Si la valeur de l'ordonnée à l'origine n'est pas claire (nombre décimal difficile à préciser ou valeur hors du graphique), il faut choisir deux points
T = <x_T ; y_T> et U = <x_U ; y_U> sur la droite, dont les coordonnées sont claires.

La pente vaut : a = $\frac{y_U - y_T}{x_U - x_T}$ et l'ordonnée à l'origine vaut : b = $y_U - a\,x_U$

(ou $y_T - a\,x_T$)

Avec la pente a et l'ordonnée à l'origine b, nous pouvons écrire l'équation $y = a\,x + b$

Exemple 10

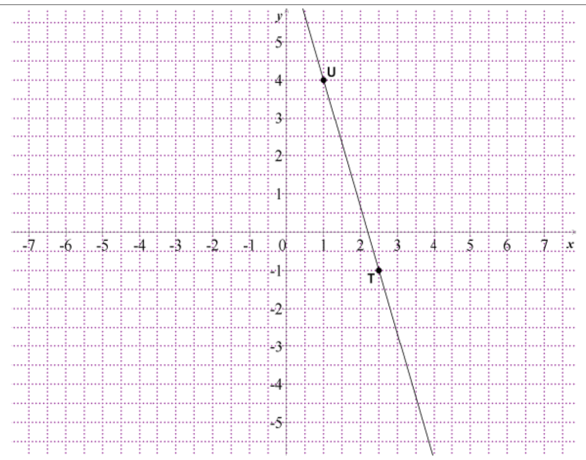


Ordonnée à l'origine : b = 1.5

S = <3 ; 2> est un point de la droite

Pente : a = $\frac{2-1.5}{3} = \frac{0.5}{3} = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$

Équation : $y = \frac{1}{6}x + 1.5 = \frac{x}{6} + \frac{3}{2}$



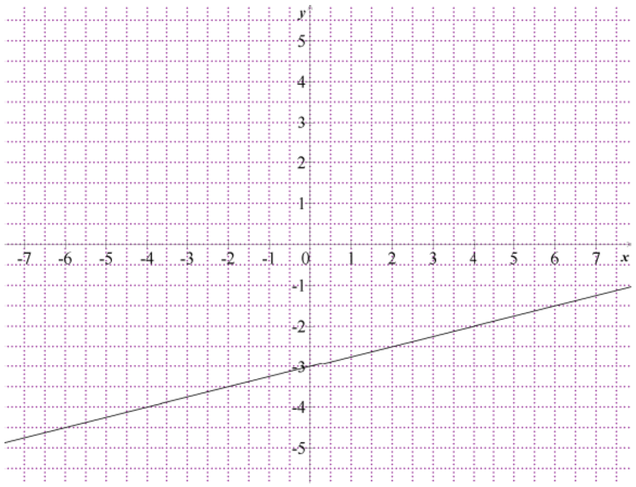
U = <1 ; 4> et T = <2.5 ; −1>

Pente : a = $\frac{-1-4}{2.5-1} = \frac{-5}{1.5} = \frac{-5}{3/2} = \frac{-10}{3}$

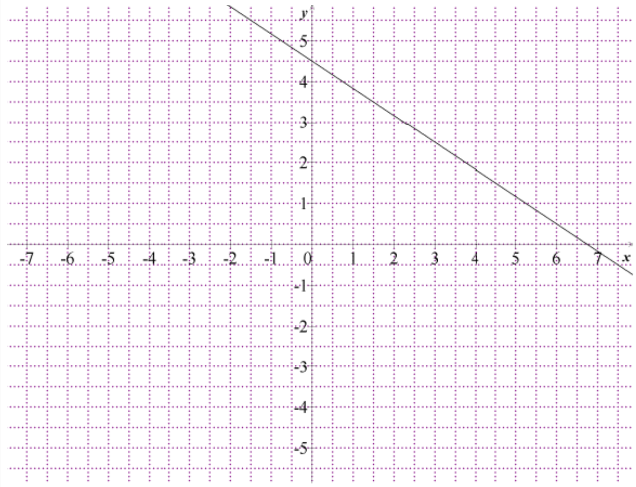
Ordonnée à l'origine : b = $4 - (\frac{-10}{3}) \cdot 1 = \frac{22}{3}$

Équation : $y = \frac{-10}{3}x + \frac{22}{3}$

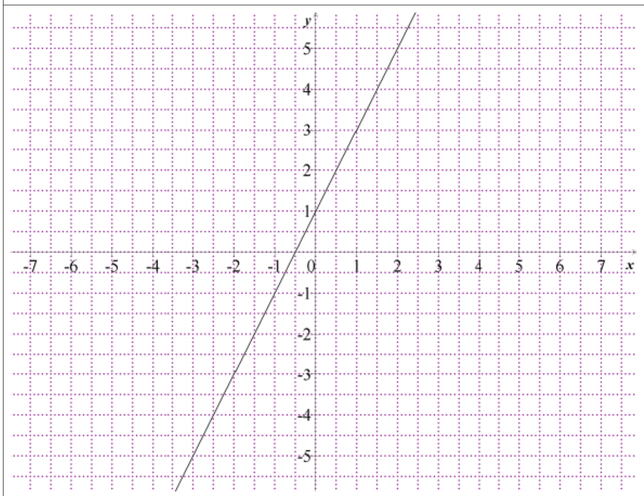
Exercice 8 Pour chacune des droites suivantes, donner une équation cartésienne.



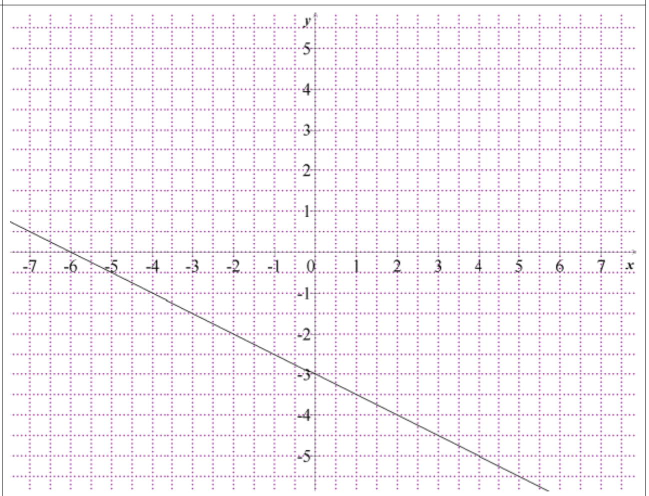
a)



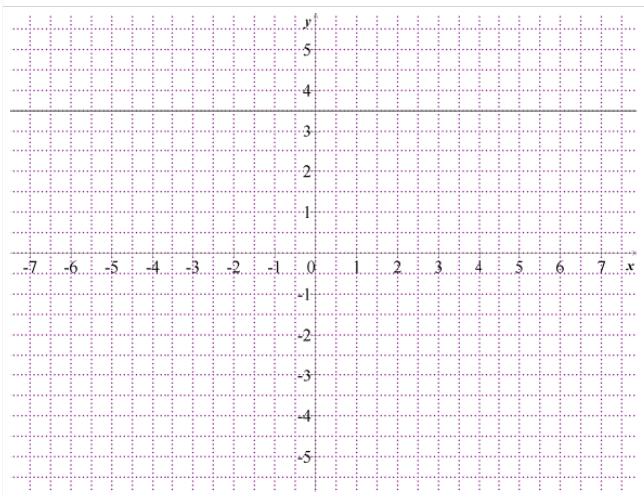
b)



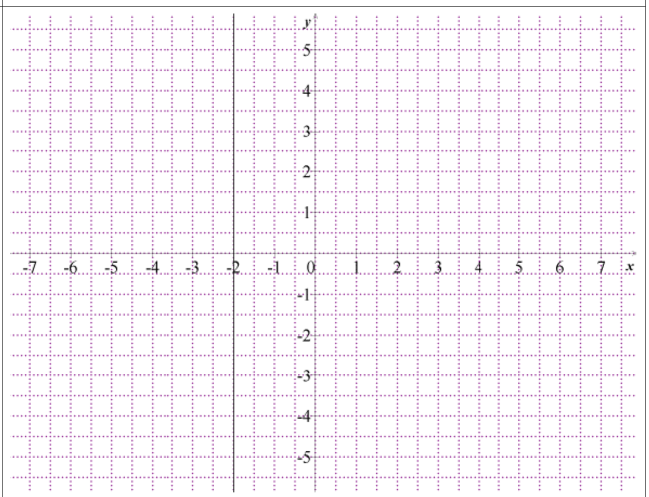
c)



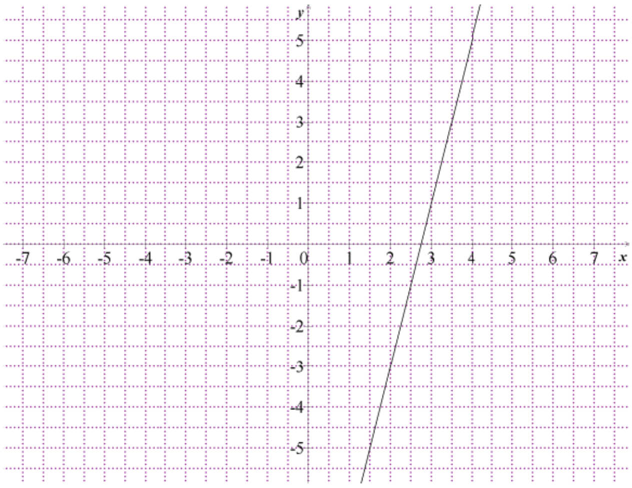
d)



e)

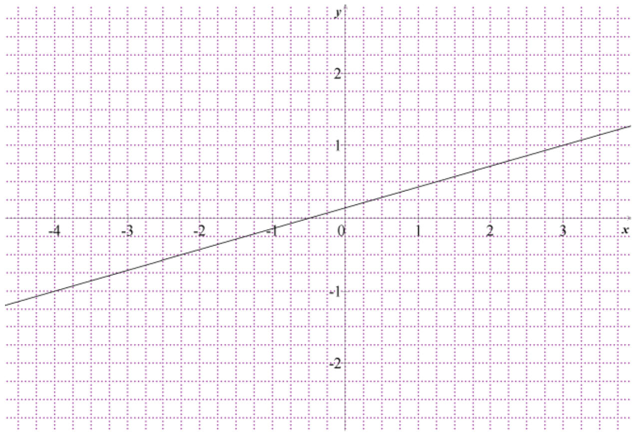


f)



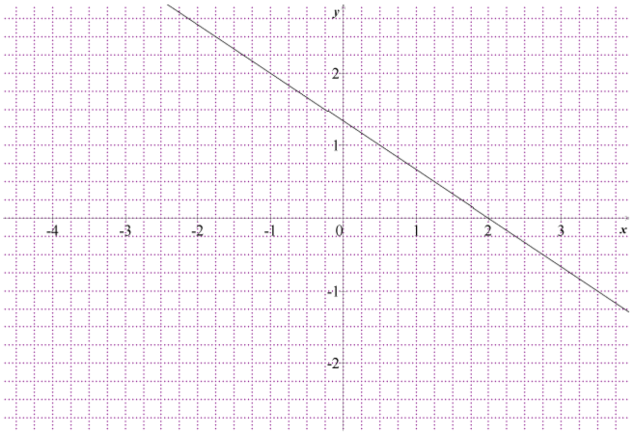
y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

g)



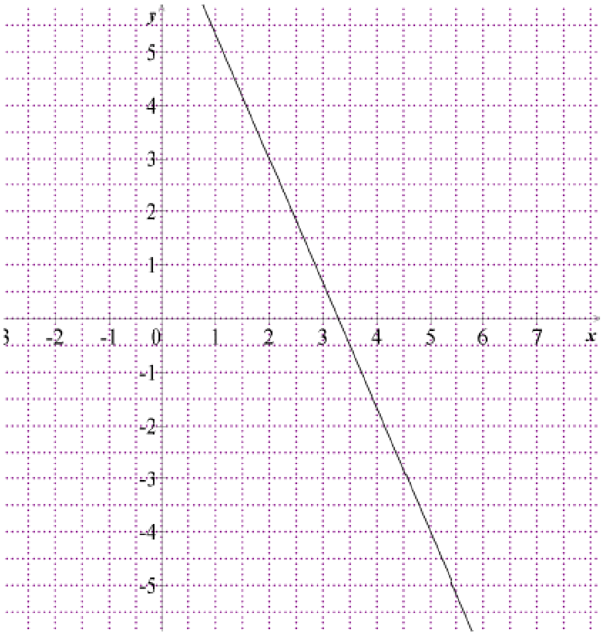
y
x
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3
2 1 -1 -2

h)



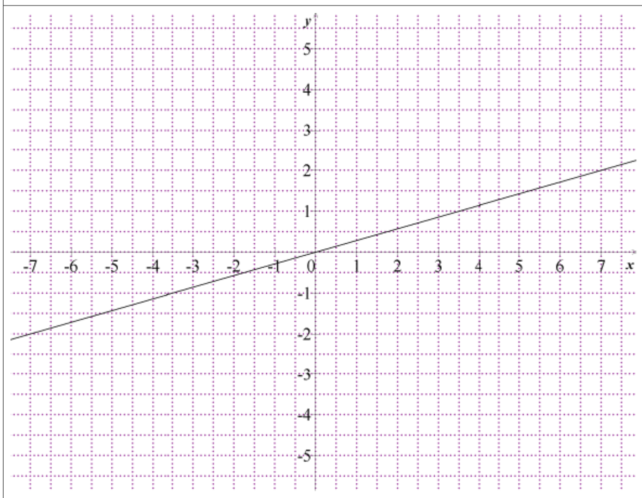
y
x
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3
2 1 -1 -2

i)



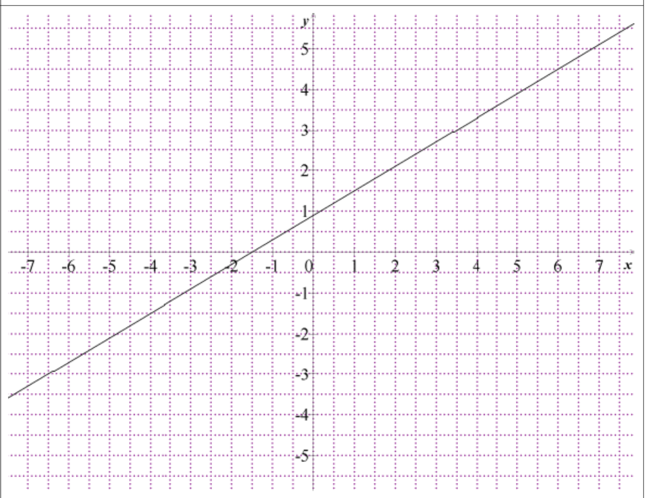
y
x
-2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

j)



y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

k)



y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

l)

Exercice 9

a) Donner l'équation d'une droite contenant les points <−53 ; 86> et <79 ; 2>

b) Donner l'équation d'une droite de pente 5, contenant le point <16 ; −11>

c) Donner l'équation d'une droite de pente −5/13, contenant le point <2 ; 8>

d) Donner l'équation d'une droite de pente −5/13, contenant le point <−2 ; 8>

e) Donner l'équation d'une droite contenant les points <−34 ; −71> et <55 ; −12>

*

Droites parallèles et droites perpendiculaires

Comme pour les segments parallèles ou perpendiculaires, nous pouvons dire :

- deux droites parallèles ont la même pente
- le produit des pentes de deux droites perpendiculaires vaut −1

Exemple 11

Soient la droite d d'équation $y=0.4x+1$ et le point U = <7 ; 2>

U n'est pas un point de d : $0.4\cdot 7+1=3.8\neq 2$

Considérons :

la droite e parallèle à d et contenant U
et la droite f perpendiculaire à d et contenant U

La pente de e est égale à celle de d. Elle vaut 0.4
L'ordonnée à l'origine de e vaut $y_U-(pente\ \ de\ \ e)\cdot x_U=2-0.4\cdot 7=-0.8$
L'équation de e est donc : $y=0.4x-0.8$

La pente de f est égale à $\dfrac{-1}{pente\ \ de\ \ d}=\dfrac{-1}{0.4}=-2.5$
L'ordonnée à l'origine de f vaut $y_U-(pente\ \ de\ \ f)\cdot x_U=2-(-2.5)\cdot 7=19.5$
L'équation de f est donc : $y=-2.5x+19.5$

Exercice 10

Soient la droite d d'équation $y=\frac{2}{3}x-4$, la droite e d'équation $y=-\frac{5}{4}x+3$ et le point U = <10 ; 17>. Donner l'équation :

a) de la droite f parallèle à d et contenant le point U

b) de la droite g parallèle à e et contenant le point U

c) de la droite h perpendiculaire à d et contenant le point U

d) de la droite i perpendiculaire à e et contenant le point U

Exercice 11

Considérons les points R = <−3.2 ; 4.5> et S = <6.8 ; −8.7>

Donner l'équation de la médiatrice du segment RS.
(La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire passant par son milieu.)

*

Intersection de deux droites

L'intersection de deux droites d et e se trouve en résolvant le système que forment l'équation de d et celle de e.

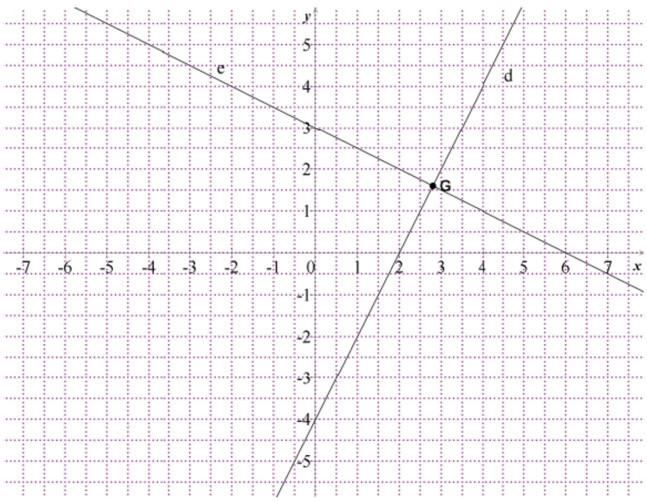
Exemple 12

Soient d : $y=2x-4$
et e : $y=-0.5x+3$

Par substitution du y d'une équation dans l'autre :

$$2x-4=-0.5x+3$$
$$2.5x-7=0$$
$$x=\frac{7}{2.5}=2.8$$
$$y=2\cdot 2.8-4=1.6$$

L'intersection est le point :
G = <2.8 ; 1.6>



Exercice 12

Soient les droites :

d : $y=3x+4$
e : $y=0.5x-2$
f : $y=-2x+7$

Trouver l'intersection de :

d et e
d et f
e et f

Exercice 13

Soient les points A = <5 ; 4>, B = <−3 ; 1> et C = <2 ; −6>

Trouver le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Indications :

Le centre K du cercle circonscrit à un triangle est :
l'intersection des médiatrices des côtés de ce triangle.

Nous pouvons le trouver par exemple en faisant l'intersection
de la médiatrice du segment AB
et de la médiatrice du segment BC,
en ayant au préalable obtenu les équations de ces deux droites.

Le rayon du cercle circonscrit est alors égal à n'importe laquelle
des longueurs des segments KA, KB ou KC.

*

De nombreux autres exercices du même genre sont possibles. Par exemple, déterminer le centre de gravité d'un triangle (intersection des médianes).

Complément breveté

Autrefois en France, dans les années 50 et 60, le brevet d'étude certifiait la fin du premier cycle de l'enseignement secondaire (élèves âgés de 15 ans). Dans les examens pour le brevet figuraient des problèmes parfois assez compliqués. En voici un exemple, où des mouvements peuvent être traduits par des équations de droites. Sur l'axe horizontal, x représente le temps ; sur l'axe vertical, y représente la distance parcourue.

Une voiture part d'un certain endroit avec une vitesse de 12 km/h.
1h45 après, un piéton et un cycliste partent du même endroit et dans la même direction, à des vitesses respectives de 6 km/h et de 18 km/h.
Dès que le cycliste a rejoint la voiture, il rebrousse chemin et se porte à la rencontre du piéton. On demande à quelle distance du point de départ commun se fera la rencontre.

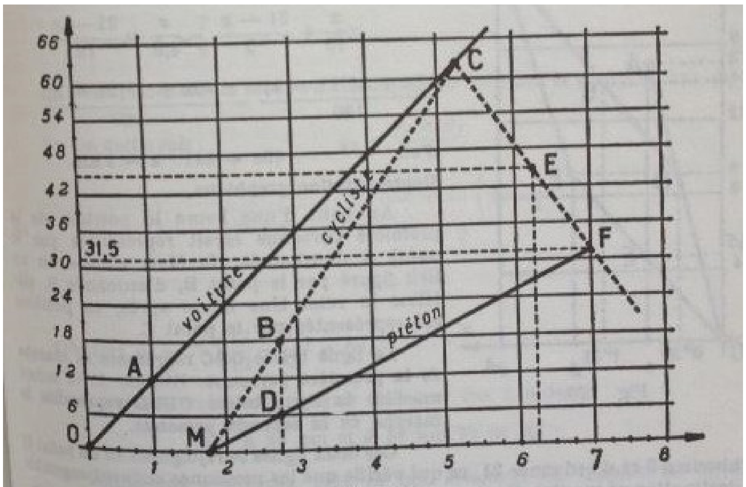


Fig. 119.

L'équation du mouvement de la voiture est :
$y = 12x$

Celle du cycliste jusqu'au moment où il rejoint la voiture est :
$y = 18x + (0 - 18 \cdot 1.75) = 18x - 31.5$

Celle du piéton est :
$y = 6x + (0 - 6 \cdot 1.75) = 6x - 10.5$

À partir de ces équations, nous pouvons déterminer d'abord le point C, puis l'équation du cycliste après qu'il a rebroussé chemin, puis le point F.

*

Complément culturel

Soient d la droite contenant les points (1 ; 10) et (10 ; 4) ;
et e la droite contenant les points (3 ; 4) et (9 ; 7).

Quel est le point d'intersection de d et de e ?

Réponse : (7 ; 6). Vérifiez-le !

Comment transcrire ce problème en poème ? Par un texte en trois parties :
1re partie : 1 vers de 10 syllabes, suivi de 10 vers de 4 syllabes
2e partie : 3 vers de 4 syllabes, suivis de 9 vers de 7 syllabes
3e partie : 7 vers de 6 syllabes

Un pari con me trace le chemin.
Je vais tout droit
vers l'infini
comme un soldat
qui obéit,
alors qu'au fond
j'aimerais tant
tourner le front,
changer de temps,
me libérer
d'un fil tendu.

Autre chemin,
autre horizon.
Je suis déçu,
car à nouveau naît l'ennui.
Il est toujours dangereux
de fixer son avenir.
Dans ma caboche de Turc,
les mots s'alignent sans bruit
et ma pensée tourne en rond.
Comment narguer le destin ?
Comment infléchir sa loi ?
Soudain, je suis fatigué.

Je ne peux plus bouger.
Le sommeil m'envahit.
Je me vois attaché
sur un lit d'hôpital.
Suis-je fou ? Suis-je mort ?
C'est affreux de croupir
et de finir ainsi.