Équations du premier degré

Une <u>équation à une inconnue</u> est une égalité dans laquelle apparaît une variable (souvent notée x) dont nous souhaitons trouver toutes les valeurs qui rendent vraie cette égalité. Celles-ci s'appellent <u>les solutions</u>. Résoudre une équation consiste à en déterminer toutes les solutions. Sauf précision contraire, nous supposerons qu'une variable varie dans l'ensemble des nombres réels.

<u>Exemple</u>

Considérons l'équation : $(2x-3)(2x+3)=17x+6$

Pour $x=0$, nous obtenons :

$(-3)3=6$
$-9=6$ Cette égalité n'est pas vraie, donc 0 n'est pas une solution.

Pour $x=1$, nous obtenons :

$(2-3)(2+3)=17+6$
$(-1)5=23$
$-5=23$ Cette égalité n'est pas vraie, donc 1 n'est pas une solution.

Pour $x=5$, nous obtenons :

$(10-3)(10+3)=85+6$
$7\cdot 13=91$
$91=91$ Cette égalité est vraie, donc 5 est une solution.

Pour $x=-0.75$, nous obtenons :

$(-1.5-3)(-1.5+3)=-12.75+6$
$(-4.5)1.5=-6.75$
$-6.75=-6.75$ Cette égalité est vraie, donc −0.75 est une solution.

Bien sûr, donner des valeurs à x et les remplacer dans l'équation n'est pas une bonne méthode de résolution, puisqu'il faudrait tester une infinité de valeurs... Mais, avec des outils informatiques, ce moyen peut permettre d'accrocher quelques solutions.

<u>Exercice 1</u>

Soit l'équation $x^3=6x-x^2$

Remplacer x successivement par 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3 et préciser quelles valeurs sont des solutions.

Une <u>équation du premier degré</u> (à une inconnue) est une équation qui peut être ramenée à la forme :

$$\boxed{a\,x+b=0 \text{ , où } a \text{ et } b \text{ sont connus et } a\neq 0}$$

Cette équation admet une <u>unique solution</u> :

$$\boxed{x=\frac{-b}{a}}$$

<u>Preuve</u>

$a\,x+b=0$ Soustrayons *b* aux deux membres :

$a\,x+b\boldsymbol{-b}=0\boldsymbol{-b}$

$a\,x=-b$ Divisons par *a* les deux membres :

$\frac{a\,x}{\boldsymbol{a}}=\frac{-b}{\boldsymbol{a}}$

$x=\frac{-b}{a}$

<u>Exemples</u>

$4\,x+5=0$ $a=4$ $b=5$ donc $x=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{4}=-1.25$

$-x-4=0$ $a=-1$ $b=-4$ donc $x=\frac{-b}{a}=\frac{-(-4)}{(-1)}=\frac{4}{-1}=-4$

<u>Exercice 2</u> Résoudre

a) $2\,x-3=0$
b) $-5\,x+9=0$
c) $7+10\,x=0$
d) $-8-7\,x=0$
e) $x+15=0$
f) $x-11=0$
g) $6\,x=0$
h) $-17+19\,x=0$

Au chapitre précédent (Quelques bases du calcul algébrique), nous avons vu que

$$A = B \quad \text{est équivalent à} \quad A - B = 0$$

Nous pouvons utiliser cette équivalence pour réduire une équation.

Exemples

a) $7x+2=3x-10$ est équivalent à :

$7x+2-(3x-10)=0$
$7x+2-3x+10=0$
$4x+12=0$
$x=\dfrac{-12}{4}=-3$

b) $4x-7=5-x$ est équivalent à :

$4x-7-(5-x)=0$
$4x-7-5+x=0$
$5x-12=0$
$x=\dfrac{12}{5}=2.4$

c) $4x+8+x=2(x-1)-10$ Réduisons d'abord les deux membres :

$5x+8=2x-2-10$
$5x+8=2x-12$ est équivalent à :

$5x+8-2x+12=0$
$3x+20=0$
$x=\dfrac{-20}{3}$

d) $-6x-10=x$ est équivalent à :

$-6x-10-x=0$
$-7\mathrm{x}-10=0$
$x=\dfrac{10}{-7}=\dfrac{-10}{7}$

Exercice 3 Résoudre

a) $3x+8=7x+2$

b) $4x-8=7x+1$

c) $11-x=4x+20$

d) $-2x-5=-3+x$

e) $9x+8=-11x$

f) $-8x+1=13$

g) $10=2x+7$

h) $4x-11=-11$

i) $x-3=-13$

j) $17-x=15$

k) $7x=4$

l) $-7x=5$

m) $-x=17$

n) $12x=5x$

o) $5+3(4+2x)=x$

p) $6-2(1-3x)=5+x$

q) $3x-3(-2-x)=5x+5$

r) $-2(x-3)=3(2x-4)$

s) $x+2(1-3x)=7$

t) $2x-5=3-(4-x)$

u) $2-3(2x-1)+x=3x+4$

v) $3(x-6)+7=2x-(10x-1)$

w) $(2x+1)(3x-5)=2x(3x-13)$

x) $(2x-3)^2=4x^2$

Exercice 4 Résoudre

a) $3\cdot(5x-3)-(x-9)=0$

b) $4\cdot(x-5)-5\cdot(3-2x)=x+4$

c) $3x\cdot(x-2)=x\cdot(3x-5)-5$

d) $5\cdot(2x-4)-2\cdot(x+5)=4x+2$

e) $5\cdot(x-3)-3\cdot(x-1)=6\cdot(3x-5)+2$

f) $-3{,}3x-7{,}2=0{,}7x+8{,}8$

g) $-23{,}2x-19{,}8=10{,}2+12{,}8x$

h) $x+0{,}7=1-1{,}1x$

i) $12-5x-2=-4x+2-5x$

j) $x-\left[(3x+2)-2\cdot(2-x)\right]=1-\left[2x-3\cdot(2x-1)\right]$

k) $1-2y+3-5y=-y-1+2-4y$

l) $-5z+1-z+3-4z+1=0$

m) $(2w+1)-3\cdot(5w+1)=2\cdot(w-4)-(3w-6)$

n) $4-\left[-2x-(5+4x)\right]=5x-\left[3-2(4x-1)\right]$

*

Quand la réduction fait disparaître *x* de l'équation...

Exemples

a) $15x-5(2+3x)=0$

$15x-10-15x=0$
$-10=0$ Cette égalité n'est pas vraie, donc l'équation n'admet aucune solution

b) $6(10x+3)-2(30x+9)=0$

$60x+18-60x-18=0$
$0=0$ Cette égalité est vraie, donc tous les nombres réels sont des solutions

Exercice 5 Résoudre

a) $10(2x+6)-3(4x+2)=4(2x+13)+2$

b) $-5(2x-7)+x-4=6(5-x)+2-3\mathrm{x}$

Exercice 6

Quel est le poids d'une âme qui dépasse de 2 grammes son propre poids ?

*

La méthode du produit en croix

Au chapitre précédent (Quelques bases du calcul algébrique), nous avons vu que

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{est équivalent à} \quad a\,d=c\,b$$

(à condition que $bd\neq 0$)

Nous pouvons utiliser cette équivalence pour résoudre certaines équations.

Exemples

a) $\frac{x}{5}=2$ peut se récrire :

$\frac{x}{5}=\frac{2}{1}$ qui est équivalent à :

$x\cdot 1=2\cdot 5$ c-à-d :

$x=10$

b) $\frac{5}{3x-4}=\frac{11}{x}$ est équivalent à :

$5x=11(3x-4)$

$5x=33x-44$

$5x-33x+44=0$

$-28x+44=0$

$x=\frac{-44}{-28}=\frac{11}{7}$

Exercice 7 Résoudre

a) $\frac{x}{3}=\frac{-2}{5}$

b) $\frac{3}{2}=\frac{x}{6}$

c) $5=\frac{x}{2}$

d) $\frac{7}{x}=\frac{-3}{5}$

e) $\frac{5}{x-3}=\frac{2}{7}$

f) $\frac{5}{7}=\frac{3x-2}{2}$

g) $\frac{7}{8}=\frac{5x}{4x-6}$

h) $\frac{5x-3}{4}=2x-1$

i) $\frac{5}{3x+2}=\frac{2}{4x-3}$

j) $\frac{3x^2-2x}{3}=\frac{2x^2-5x+2}{2}$

k) $\frac{3x+1}{3x+4}=\frac{x-2}{x}$

l) $\frac{5}{x-1}=\frac{3}{2-2x}$

(attention : il y a un piège !)

*

Chasser les dénominateurs

Une équation avec des fractions peut être résolue de plusieurs façons.
Nous avons vu la méthode du produit en croix.
Voyons d'autres méthodes.

Exemples

$\frac{3x}{2}-1=7$ Quand une fraction donne un résultat décimal simple (ici $\frac{3}{2}=1.5$ n'a qu'un chiffre après la virgule), il peut être avantageux de résoudre l'équation avec cette valeur décimale.

$1.5x-1=7 \quad \rightarrow \quad 1.5x=8 \quad \rightarrow \quad x=\frac{8}{1.5}=5.\overline{3}$

$\frac{2x-3}{6}=\frac{x}{10}+7$ Quand on veut travailler exclusivement avec des fractions d'entiers, les dénominateurs peuvent être chassés en multipliant les deux membres de l'équation par un multiple de tous les dénominateurs. Ici, le plus petit multiple commun de 6 et de 10 est 30.

$\frac{2x-3}{6}=\frac{x}{10}+7$ Multiplions par 30 les deux membres :

$\mathbf{30}\cdot\frac{2x-3}{6}=\mathbf{30}\cdot\left(\frac{x}{10}+7\right)$

$\frac{30(2x-3)}{6}=\frac{30x}{10}+30\cdot7$ Simplifions les fractions $\frac{30}{6}$ et $\frac{30}{10}$:

$5(2x-3)=3x+210$

$10x-15=3x+210$

$10x-15-3x-210=0$

$7x-225=0$

$x=\frac{225}{7}$

Exercice 8

Résoudre en remplaçant les fractions par des nombres décimaux et donner la réponse au millième.

$\frac{2}{5}x=3x+\frac{1}{8}$

Exercice 9 Résoudre en travaillant avec des fractions

a) $\frac{2x}{3}+2=x+\frac{1}{4}$ b) $\frac{5x}{6}+\frac{1}{2}=-x+\frac{1}{9}$ c) $\frac{3x+5}{2}-7=-4x$ d) $3x=\frac{12x+7}{4}-2$

Exercice 10 Résoudre en travaillant avec des fractions

a) $2+\frac{x}{3}=\frac{3}{2}$ b) $2+\frac{3x}{10}=\frac{4}{5}$ c) $2x+1=\frac{1}{3}+\frac{x}{4}$ d) $\frac{5}{2}+2x=1$

e) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3}{4}=0$ f) $1-\frac{2x}{3}+\frac{3}{5}=x$ g) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=\frac{1}{6}$ h) $\frac{4}{3}-\frac{x}{2}=3x$

Pour le plaisir, corsons un peu les choses en ajoutant des parenthèses à des équations avec fractions. Le truc est alors d'effectuer la distributivité avant de partir à la chasse aux dénominateurs.

Exercice 11

a) $4-\frac{2}{3}\left(3-\frac{x}{2}\right)=0$

b) $2x-3\left(1-\frac{2x}{5}\right)=1$

c) $3x-2\left(1-\frac{1}{4}\right)=x$

d) $\frac{1}{6}+3\cdot(1-2x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x-\frac{3}{4}\right)$

e) $\frac{4}{7}\cdot(x-1)=\frac{3}{5}\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$

f) $3x-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{5}+6\right)=25+\frac{3}{2}x$

g) $x-3\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{x-2}{4}\right)=\frac{2+4x}{3}$

*

Produit nul

Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs soit nul.

En formule, on peut écrire :

$ABC...=0$ est équivalent à ($A=0$ ou $B=0$ ou $C=0$ ...)

Nous pouvons appliquer cette propriété à certaines équations.

Exemple

$(x-2)(x+3)(2x-11)=0$ est équivalent à ($x-2=0$ ou $x+3=0$ ou $2x-11=0$),
c'est-à-dire à ($x=2$ ou $x=-3$ ou $x=\frac{11}{2}=5.5$)
L'équation admet donc trois solutions : {2 ; −3 ; 5.5}

Exercice 12 Résoudre

a) $(3x+7)(5-x)(9-4x)=0$

b) $x(17+19x)(10x-3)=0$

*

Il est temps d'exploiter les équations pour résoudre quelques problèmes.
Il s'agira chaque fois :

- de bien préciser ce que représente x ;
- de poser une équation traduisant le problème ;
- de la résoudre ;
- de répondre avec une petite phrase.

Exemple

Grâce à une révolution sanguinaire, un fabricant de guillotines voit son capital augmenter de 467'500 francs, ce qui le rend 3.5 fois plus riche. Quel était son capital juste avant la révolution ?

x = capital juste avant la révolution

Équation : $x+467'500=3.5x$

Résolution : $-2.5x+467'500=0$ → $x=\frac{-467'500}{-2.5}=187'000$

Réponse : Le capital du fabricant juste avant la révolution était de 187'000 francs.

Exercice 13

La princesse Bouton-d'or est couverte d'acné. Elle vend à des sorcières le sébum qu'elle extrait de ses comédons. Sachant qu'elle demande 7.35 francs par gramme et prend une taxe fixe de 18.95 francs pour ses frais administratifs, quelle quantité de sébum a-t-elle vendue à la sorcière Samantha qui a dû acquitter une facture de 1025.90 francs ?

Exercice 14

Un étudiant est noté sur 100 en cosmétique cosmologique. Ses quatre premières notes sont 68, 79, 72 et 83. Quelle doit être sa cinquième note pour qu'il obtienne une moyenne de 75 ?

Exercice 15

Des bouteilles identiques ont une capacité de 1 litre. Sachant que deux bouteilles pleines d'eau équilibrent 18 bouteilles vides sur une balance à deux plateaux, trouver le poids d'une bouteille vide.

Exercice 16

Quand Pinocchio ment, son nez s'allonge de 75 %, atteignant alors la taille de 77 cm. Quelle est sa taille quand Pinocchio ne ment pas ?

Exercice 17

a) En multipliant un nombre par 5, on obtient le même résultat que si on lui avait ajouté 32. Quel est ce nombre ?

b) Trouver un nombre dont le quadruple diminué de 7 dépasse de 19 son double.

c) Le tiers d'un nombre, augmenté de la moitié de ce nombre, donne 75. Quel est ce nombre ?

d) Un nombre augmenté de ses 18% est égal aux trois quarts de ce même nombre. Quel est ce nombre ?

Exercice 18

En 2030, la population du canton de Genève atteint 840'000 individus, dont 83% d'étrangers. Combien faudrait-il chasser d'étrangers pour que la proportion de Suisses atteigne 51% ?

Exercice 19

Le mari d'une fille de 14 ans est quatre fois plus âgé qu'elle. Dans combien d'années l'âge du mari sera-t-il une fois et demie celui de son épouse ?

Exercice 20

Un marchand d'esclaves veut liquider son stock. Il vend les trois quarts des esclaves à 832 francs / pièce. Parmi ceux qui restent, il en tue 8 qui sont malades. Les autres sont soldés à 424 francs / pièce. Au terme de cette opération, il est plus riche de 180'568 francs. Combien avait-il d'esclaves au début ?

Exercice 21

Un terroriste a acheté un certain nombre de caisses contenant chacune 300 cartouches de fusil mitrailleur. Si la même quantité de cartouches lui avait été livrée par caisses de 425, il y aurait 15 caisses de moins. Combien a-t-il reçu de caisses ?

Exercice 22

Une villa carrée est entourée d'une grille placée à 4 m des murs. La surface comprise entre la grille et les murs est de 292 m^2. Combien mesure un côté de la villa ?

Exercice 23

Le volume expiratoire maximal par seconde est le volume d'air expiré pendant la première seconde d'une expiration dite « forcée », suite à une inspiration profonde. On le note VEMS en français et FEV1 en anglais. Pour savoir si une personne a un bon fonctionnement pulmonaire, on compare le VEMS mesuré avec un VEMS standard. Ce VEMS standard a été déterminé par des études statistiques. Il dépend du sexe, de l'âge A (en années), de la taille h (en cm) et, du moins jusqu'en 2012, de l'origine ethnique. Une formule trouvée dans un manuel de médecine édité en 2009 donne :

Hommes : VEMS = R•1.08•(0.043•h − 0.029•A − 2.49)
Femmes : VEMS = R•1.08•(0.0395•h − 0.025•A − 2.6)

où R est un paramètre qui vaut 1 pour une personne caucasienne, 0.87 pour une personne noire et 0.93 pour une personne asiatique.

Considérons un VEMS standard de 3 litres.

a) Trouver la taille h qui correspond à un homme noir de 50 ans.
b) Trouver la taille h qui correspond à une femme asiatique de 50 ans.

Systèmes

Intéressons-nous à des systèmes de 2 équations à 2 inconnues, dont la résolution peut se faire par substitution. Le principe est d'isoler x ou y dans une équation et de remplacer, dans l'autre équation, la variable isolée par l'expression qu'on a trouvée.

Exemple $\begin{cases} 3x+5y=-1 \\ -2x+y=18 \end{cases}$

Le plus simple, ici, est d'isoler y dans la deuxième équation et de remplacer y dans la première équation par l'expression trouvée.

isoler $y=18+2x$
substituer $3x+5(18+2x)=-1$
résoudre $3x+90+10x=-1$
$13x+91=0$
$x=\frac{-91}{13}=-7$

reprendre $y=18+2x$ et remplacer x par −7 pour obtenir la valeur de y
$y=18+2(-7)=18-14=4$

Remarque

Quand c'est possible, il est plus simple d'isoler un x ou un y avec un coefficient 1.

Exercice 24 Résoudre

a) $\begin{cases} x+2y=56 \\ 3x+10y=187 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x+y=1 \\ 2x-12y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=100 \\ -7x+5y=-23 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x-4.5y=13 \\ x-y=-2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+3y=72 \\ y=6.25x-2 \end{cases}$

Exercice 25

Une carte et son enveloppe coûtent ensemble 1.10 francs. La carte coûte 1 franc de plus que l'enveloppe. Combien coûte l'enveloppe ?

Exercice 26

Barnabé le bourreau
prend cent-quatorze euros
pour couper une tête
et trente-quatre euros
pour toute autre requête.
S'il reçoit mille euros
pour vingt tâches bien faites,
combien cet homme honnête
a-t-il coupé de têtes ?

Exercice 27

Trouver deux nombres tels que le deuxième soit égal au triple du premier et que leur somme soit égale à 76.

Exercice 28

La moyenne de deux nombres vaut 20. Le plus grand vaut quatre fois le plus petit. Quels sont ces nombres ?

Exercice 29

Partager 4800 francs entre deux personnes de telle sorte que la part de la deuxième soit égale au triple de la part de la première.

Exercice 30

En 2030, dans toute l’Europe, la sincérité est considérée comme une déviance. Les sincères doivent subir un traitement médical destiné à les rendre menteurs. Ce traitement coûte 1'500 euros pour une femme et 2'500 euros pour un homme. Il ne reste dans toute l’Europe que 100 personnes sincères, hommes ou femmes. Sachant que le coût total pour les traiter est de 206'000 euros, combien y a-t-il de femmes parmi elles ?

Exercice 31

Le périmètre d’un rectangle est de 66 m. Sa longueur mesure 15 m de plus que sa largeur. Trouver ses dimensions.

Exercice 32

Soient deux nombres. Si on ajoute au premier nombre 3 fois le second, on obtient 90. Et si on ajoute au second 3 fois le premier on trouve 70. Quels sont ces nombres ?

Exercice 33

Partager 740 francs entre deux personnes de telle sorte que la deuxième reçoive 300 francs de moins que la première.

Exercice 34

Le périmètre d’un rectangle est de 112 cm. Sa largeur mesure 12 cm de moins que sa longueur. Trouver ses dimensions.

Exercice 35

Hier, Max a tiré 66 coups. Chaque fois qu’il manquait la cible, il versait 4 Francs à Lili ; chaque fois qu’il touchait la cible, Lili lui donnait 10 Francs et un bisou. Au terme de ce jeu, Max s’est retrouvé plus riche de 100 Francs. Combien a-t-il reçu de bisous ?

Exercice 36

Il y a 7 ans, Jean avait 4 fois l’âge de Marie. Dans 15 ans, Jean aura 2 fois l’âge de Marie. Quel âge a Marie maintenant ?

Exercice 37

Le périmètre d’un rectangle est de 84 cm. Sa largeur est égale aux 3/4 de sa longueur. Quelles sont ses dimensions ?

Exercice 38

On ajoute 11 à chacun des deux facteurs d’un produit. Ce produit augmente alors de 1188. Quels sont ces deux facteurs sachant que l’un surpasse l’autre de 7 ?

Exercice 39

41 livres de deux formats sont empilés. L'épaisseur de chaque livre « mince » est de 2 cm, celle de chaque livre « épais » de 3 cm. La hauteur de la pile est de 99 cm. Combien y a-t-il de livres de chaque épaisseur ?

Exercice 40

Soliman dit à Bajazet : « Donne-moi 21 de tes femmes et nous en aurons autant l'un que l'autre ». Bajazet lui répond : « Donne-moi 13 de tes femmes et j'en aurai le double de ce qui te restera ». Combien chacun a-t-il de femmes ?

Exercice 41 Ces deux phrases disent-elles la vérité ?
Écrire le système qu'elles énoncent et en donner la solution.

Trois fois le nombre de lettres de cette phrase plus quatre fois celui de la suivante font six cent cinquante.
Trois fois le nombre de lettres de cette phrase plus quatre fois celui de la précédente font six cent quarante-cinq.