Équations du second degré

Équations simples

Exemples 1

3^2 et $(-3)^2$ donnent tous deux 9. Donc l'équation :

$x^2=9$ a deux solutions : $x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$, c-à-d $x_1=3$ et $x_2=-3$

De même, l'équation :

$x^2=7$ a deux solutions : $x=\pm\sqrt{7}\approx\pm 2.65$, c-à-d $x_1=2.65$ et $x_2=-2.65$

L'équation :

$x^2=0$ n'a qu'une solution : $x=0$

L'équation :

$x^2=-4$ n'a pas de solutions, puisque tout nombre réel élevé au carré fournit un résultat positif.

L'équation :

$(x+3)^2=5$ peut être résolue ainsi :

$x+3=\pm\sqrt{5}$

$x=-3\pm\sqrt{5}$, c-à-d $x_1=-3+\sqrt{5}\approx -0.76$ et $x_2=-3-\sqrt{5}\approx -5.24$

Ces quelques exemples illustrent un phénomène général avec les équations du second degré, à savoir l'existence de trois cas possibles :

2 solutions
1 solution
0 solution

Exercice 1

Résoudre.

a) $x^2=16$

b) $5x^2=30$

c) $\pi x^2=0.5$

d) $x^2-49=0$

e) $x^2+64=0$

f) $(x+5)^2=0$

g) $(x-5)^2=0$

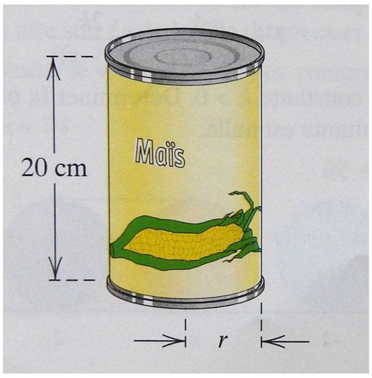
h) $(113x-75)^2+1=0$

i) $(x-4)^2=10$

j) $(x+7)^2-13=0$

Exercice 2

Une boîte de conserve cylindrique a un volume de 3000 cm^3. Elle mesure 20 cm de haut. Combien mesure le rayon du cercle formant la base et le couvercle ?



Exercice 3

Un fermier projette de clôturer un terrain rectangulaire, en utilisant l'écurie pour border un côté et une barrière pour border les trois autres côtés. Si le côté parallèle à l'écurie vaut 2.5 fois chacun des autres côtés, et si l'aire du terrain est de 135 m^2, combien de mètres de barrière doit-il acheter ?

Exemple 2

Comment résoudre l'équation $x^2+6x+1=0$? Faisons un détour.

En développant $(x+p)^2$, nous trouvons :

$$(x+p)^2=(x+p)(x+p)=x^2+px+px+p^2=x^2+2px+p^2$$

En passant p^2 de l'autre côté, nous obtenons :

$$\boxed{x^2+2px=(x+p)^2-p^2 \quad \text{(Formule 1)}}$$

En particulier, pour $p=3$, la Formule 1 nous livre : $x^2+6x=(x+3)^2-3^2$

Revenons à l'équation $x^2+6x+1=0$ et remplaçons x^2+6x par $(x+3)^2-3^2$.

Nous obtenons : $(x+3)^2-3^2+1=0$, c-à-d $(x+3)^2-8=0$ qui devient $(x+3)^2=8$
d'où $x+3=\pm\sqrt{8}$ et enfin $x=-3\pm\sqrt{8}$

Solutions : $x_1=-3+\sqrt{8}\approx-0.17$ et $x_2=-3-\sqrt{8}\approx-5.83$

Exercice 4

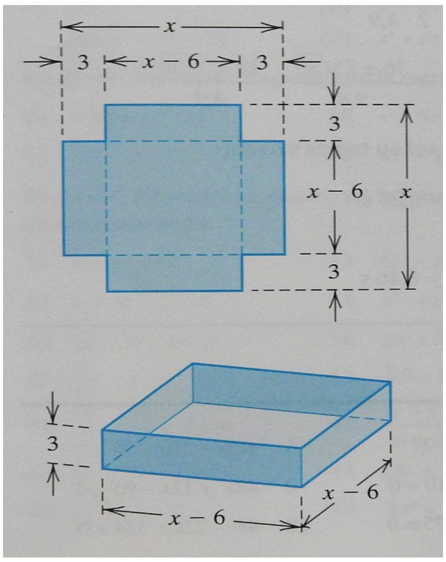
a) Remplacer p par 5 dans la Formule 1 et résoudre $x^2+10x-4=0$

b) Remplacer p par −7 dans la Formule 1 et résoudre $x^2-14x+11=0$

c) Remplacer p par 4 dans la Formule 1 et résoudre $x^2+8x+20=0$

Exercice 5

On veut faire une boîte ouverte de base carrée, à partir d'un morceau de métal carré, en coupant à chaque coin un carré de 3 cm de côté, et en pliant les bandes rectangulaires. De quelle taille doit être le morceau de métal pour que la boîte ait un volume de 53 cm³ ?



Formule quadratique (Brahmagupta, 628)

La méthode précédente se généralise ainsi :

Soit l'équation $\boxed{a x^2+b x+c=0}$,

où x est l'inconnue, et a,b, c sont les coefficients (qui peuvent être positifs ou négatifs)

Supposons le coefficient a différent de zéro, pour avoir effectivement une équation de degré 2.

Notons Δ (Delta) la quantité b^2-4ac , qui s'appelle le discriminant de l'équation.

Il nous faut distinguer 3 cas :

Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions : $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution : $x=\frac{-b}{2a}$

Si $\Delta<0$, l'équation n'admet aucune solution réelle

Exemple 3

équation $3x^2-5x-1=0$

coefficients $a=3$ $b=-5$ $c=-1$

discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot3\cdot(-1)=25+12=37$

signe de Δ $\Delta>0$ donc 2 solutions

calcul final $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{37}}{2\cdot3}=\frac{5\pm\sqrt{37}}{6}$

$x_1=\frac{5+\sqrt{37}}{6}\approx1.85$ et $x_2=\frac{5-\sqrt{37}}{6}\approx-0.18$

Exemple 4

équation
$$x(2+x)=-2$$
$$2x+x^2=-2$$
$$2x+x^2+2=0$$
$$1x^2+2x+2=0$$

coefficients $a=1$ $b=2$ $c=2$

discriminant $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\cdot1\cdot2=4-8=-4$

signe de Δ $\Delta<0$ donc aucune solution

Remarque : il a fallu ici d'abord transformer l'équation pour la mettre sous la forme $ax^2+bx+c=0$, condition préalable à l'application de cette méthode.

Exercice 6

Résoudre.

a) $-7x^2-8x+13=0$

b) $6x-x^2=9$

c) $0.25x^2+x+0.7=0$

d) $-x^2+10x=35$

e) $(x+2)(x-4)=-9$

f) $-4x(5-2x)=36-3x$

g) $x^2+9=2x-3$

h) $(x-1)(x-2)=x^2$

i) $\frac{5x-1}{3}=\frac{4x}{x+2}$

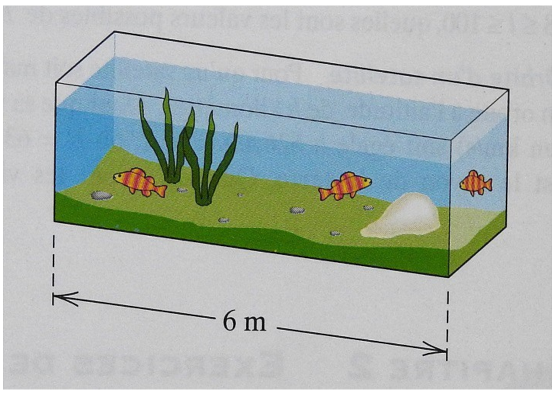
j) $(2x-3)^2=(3x+1)^2$

k) $\frac{\pi}{2}x^2=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{11}{7}$

l) $\frac{3x}{2x-5}=\frac{7-x}{4x+11}$

Exercice 7

On veut construire un aquarium sans couvercle de 6 m de long, deux faces latérales étant carrées. Calculer la hauteur si on veut utiliser 39 m^2 de verre (le fond est aussi en verre).



Exercice 8 *La divine proportion*

À un segment AB de longueur 1,
ajoutons un point C sur la même ligne,
à une distance x de B.
Trouver x pour avoir
la proportion suivante :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Exercice 9

Les deux diagonales d'un losange mesurent 18 m et 11 m. On ajoute une même longueur à chacune d'elles de manière à former un nouveau losange dont la surface soit double de celle du premier. Quelle est la longueur ajoutée ?

Exercice 10

Un terrain rectangulaire de 26 m sur 30 m est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire totale du trottoir est de 202 m^2, quelle est sa largeur ?

Exercice 11

Une personne destine 90'610 francs à être partagés également entre un certain nombre de personnes. Au moment du partage, 4 des destinataires sont décédés. La part de chaque survivant se trouve augmentée de 1'640 francs. Combien de personnes devaient initialement se partager la somme ?

Indication : Exprimer en fonction de x (le nombre cherché) la part initialement prévue de chaque personne et la part finalement versée à chaque personne. Cette deuxième part vaut 1'640 francs de plus que la première, ce qui permet de poser une équation. Cette équation comporte des dénominateurs algébriques. Multiplier toute l'équation par le produit de ces dénominateurs.

Systèmes

Intéressons-nous à quelques systèmes de 2 équations à 2 inconnues, dont la résolution par substitution donne une équation du second degré.

Exemple 5

$$\begin{Bmatrix} x+2y=5 \\ xy=3 \end{Bmatrix}$$

Le plus simple, ici, est d'isoler x dans la première équation et de remplacer x dans la deuxième équation par l'expression trouvée.

isoler $x=5-2y$

substituer $(5-2y)y=3$

résoudre $5y-2y^2=3$

$-2y^2+5y-3=0$

$a=-2 \qquad b=5 \qquad c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)=25-24=1$

$y=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-2)}=\dfrac{-5\pm1}{-4}$

$y_1=1$ et $y_2=1.5$

$x_1=5-2y_1=5-2=3$ et $x_2=5-2y_2=5-3=2$

Les solutions sont les couples : <3 ; 1> et <2 ; 1.5>

Exercice 12

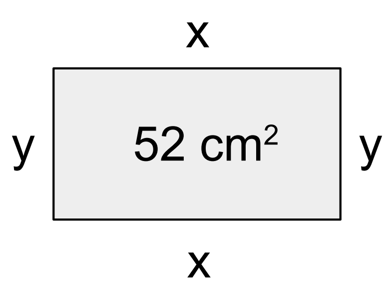
Résoudre.

a) $\begin{Bmatrix} y-2x=7 \\ xy=8 \end{Bmatrix}$

b) $\begin{Bmatrix} 0.8x^2+y^2=25 \\ y-0.5x=1 \end{Bmatrix}$

Exercice 13

Trouver les dimensions d'un rectangle dont l'aire vaut 52 cm² et le périmètre 30 cm.



Exercice 14

Trouver les dimensions d'un rectangle dont l'aire vaut 874 cm^2 et dont la longueur dépasse de 15 cm la largeur.

Exercice 15

Trouver les dimensions d'un rectangle dont l'aire vaut 10 m^2 et dont la longueur dépasse de 1.5 m le double de la largeur.

Exercice 16

La différence de deux nombres vaut 76, et le plus grand vaut 5 fois le carré du plus petit. Quels sont ces nombres ?

Exercice 17 *François Viète*

Comment trouver simplement deux nombres *u* et *v*
dont la somme vaut *S* et le produit *P* ?

Considérons l'équation $(x-u)(x-v)=0$, dont *u* et *v* sont les solutions.
En la développant, nous obtenons : $x^2-ux-vx+uv=0$, c-à-d $x^2-(u+v)x+uv=0$
Or $u+v=S$ et $uv=P$, donc *u* et *v* sont les solutions de $x^2-Sx+P=0$.

Application :

a) Trouver, s'ils existent, les deux nombres dont la somme vaut 1 et le produit 0.2 ?
b) Trouver, s'ils existent, les deux nombres dont la somme vaut 5 et le produit −10 ?
c) Trouver, s'ils existent, les deux nombres dont la somme vaut 35 et le produit 11 ?
d) Trouver, s'ils existent, les deux nombres dont la somme vaut 11 et le produit 35 ?

Exercice 18

Trouver les dimensions d'un rectangle dont le périmètre vaut 112 m et la diagonale 40 m.

Exercice 19

Trouver les dimensions d'un rectangle dont l'aire vaut 262 m^2 et dont le cercle circonscrit a 13 m de rayon.

Exercice 20 Ces phrases disent-elles la vérité ?

Le nombre de lettres de cette phrase est une des solutions de l'équation : x au carré moins deux cent cinquante-trois fois x plus seize mille est égal à zéro. Le nombre de lettres de cette phrase est l'autre des solutions de l'équation : x au carré moins deux cent cinquante-trois fois x plus seize mille est égal à zéro.