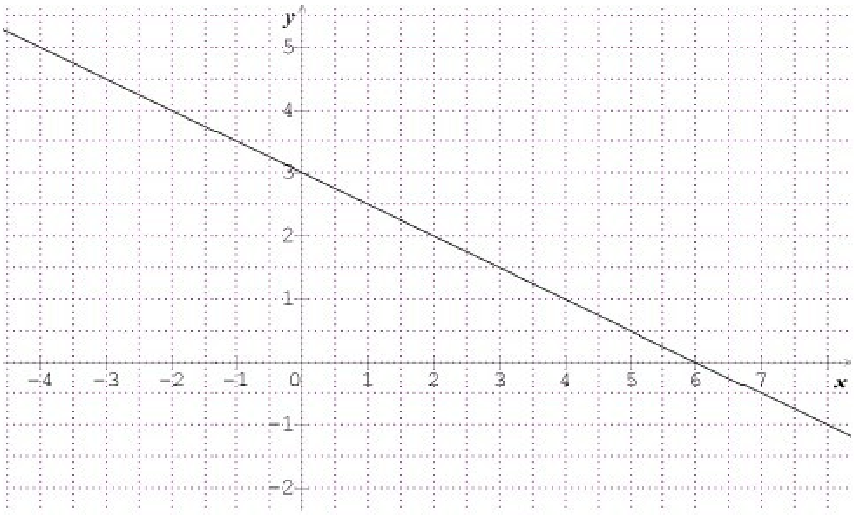
5. Fonctions affines

Exemple 5.1

Voici le graphe de f(x) = −0.5x + 3



C’est une droite de pente −0.5 : elle descend de 0.5 quand x augmente de 1.
La fonction est strictement décroissante. Elle a pour ordonnée à l’origine 3 et pour zéro 6.

*

Une fonction affine est une fonction de la forme f(x) = ax + b (avec a ≠ 0)

Son graphe est une droite oblique.
Son ordonnée à l’origine vaut b.
Son zéro vaut −b / a
Sa pente vaut a

Elle est strictement croissante si a > 0 et strictement décroissante si a < 0.

Soient deux points distincts <x_1 ; $f(x_1)$> et <x_2 ; $f(x_2)$>, alors :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{a\,x_2+b-a\,x_1-b}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a$$

Soit un point <x_0 ; $f(x_0)$>, alors :

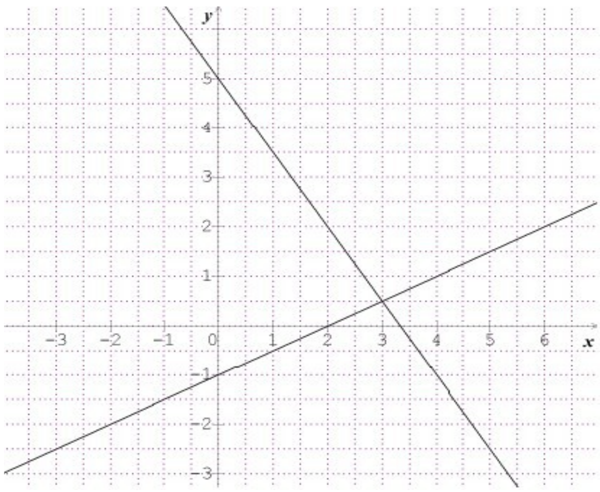
$f(x)=a(x-x_0)+f(x_0)$ et $b=f(x_0)-a\,x_0$

Exercice 14

Exprimer algébriquement une fonction affine de pente 1.5 et contenant le point <4 ; 3>. La représenter graphiquement. Donner son zéro et son ordonnée à l'origine.

Exercice 15

Exprimer algébriquement les deux fonctions affines représentées ci-dessous.



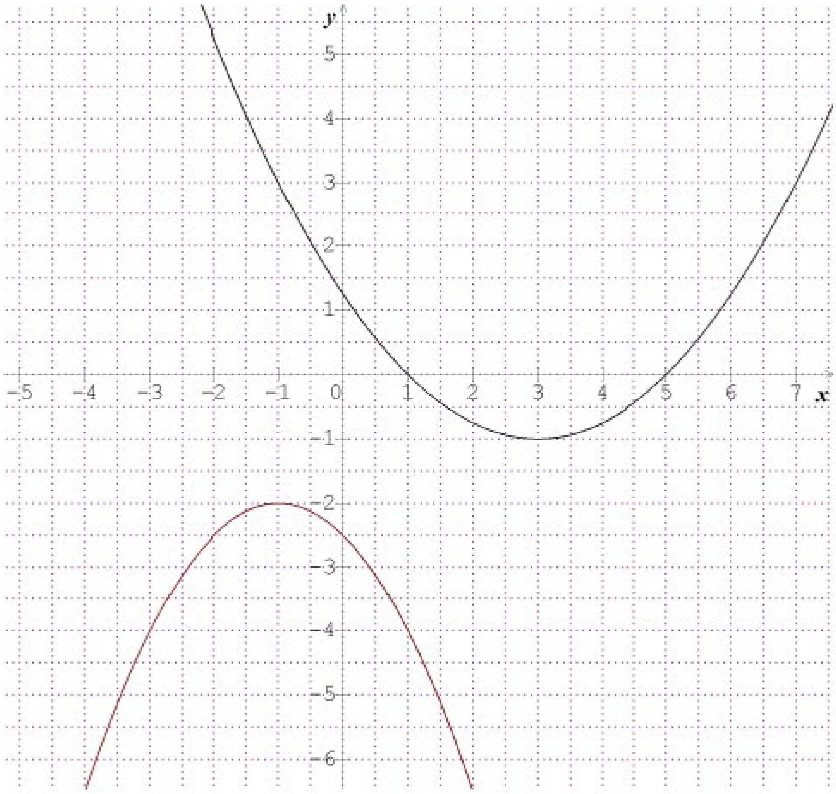
Exercice 16

Le tarif d'un taxi est fixé ainsi :
Prise en charge : 7 pistoles
Prix par lieue ancienne : 3 pistoles
Exprimer algébriquement la fonction donnant le montant à payer pour un trajet de x lieues anciennes et la représenter graphiquement.

6. Fonctions quadratiques

<u>Exemple 6.1</u>

Voici les graphes de $f(x) = 0.25(x - 3)^2 - 1$ et de $g(x) = -0.5(x + 1)^2 - 2$



Chacune de ces courbes est une <u>parabole</u>.

f possède un <u>axe de symétrie vertical</u> en x = 3 ; g en x = −1

f est strictement décroissante sur]−∞ ; 3[et strictement croissante sur]3 ; +∞[
g est strictement croissante sur]−∞ ; −1[et strictement décroissante sur]−1 ; +∞[
f possède un minimum global : <3 ; −1> ; g possède un maximum global : <−1 ; −2>
f est bornée inférieurement par −1, mais non bornée supérieurement
g est bornée supérieurement par −2, mais non bornée inférieurement

l'ordonnée à l'origine de f est 1.25 ; celle de g est −2.5
les zéros de f sont 1 et 5 ; g n'a pas de zéros
le signe de f est + sur]−∞ ; 1[et sur]5 ; +∞[; le signe de f est − sur]1 ; 5[
le signe de g est − sur R

*

Une <u>fonction quadratique</u> est une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

On peut la mettre aussi sous la forme réduite $f(x) = a(x - j)^2 + k$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, nous avons : $j = \frac{-b}{2a}$ et $k = \frac{-\Delta}{4a}$

Le graphe de f est une parabole, avec un axe de symétrie vertical en $x = j$

si $a > 0$:
f est strictement décroissante sur $]-\infty ; j[$ et strictement croissante sur $]j ; +\infty[$
f possède un minimum global : $\langle j ; k \rangle$
f est bornée inférieurement par k, mais non bornée supérieurement

si $a < 0$:
f est strictement croissante sur $]-\infty ; j[$ et strictement décroissante sur $]j ; +\infty[$
f possède un maximum global : $\langle j ; k \rangle$
f est bornée supérieurement par k, mais non bornée inférieurement

l'ordonnée à l'origine de f vaut : c ou $aj^2 + k$ (avec la forme réduite)

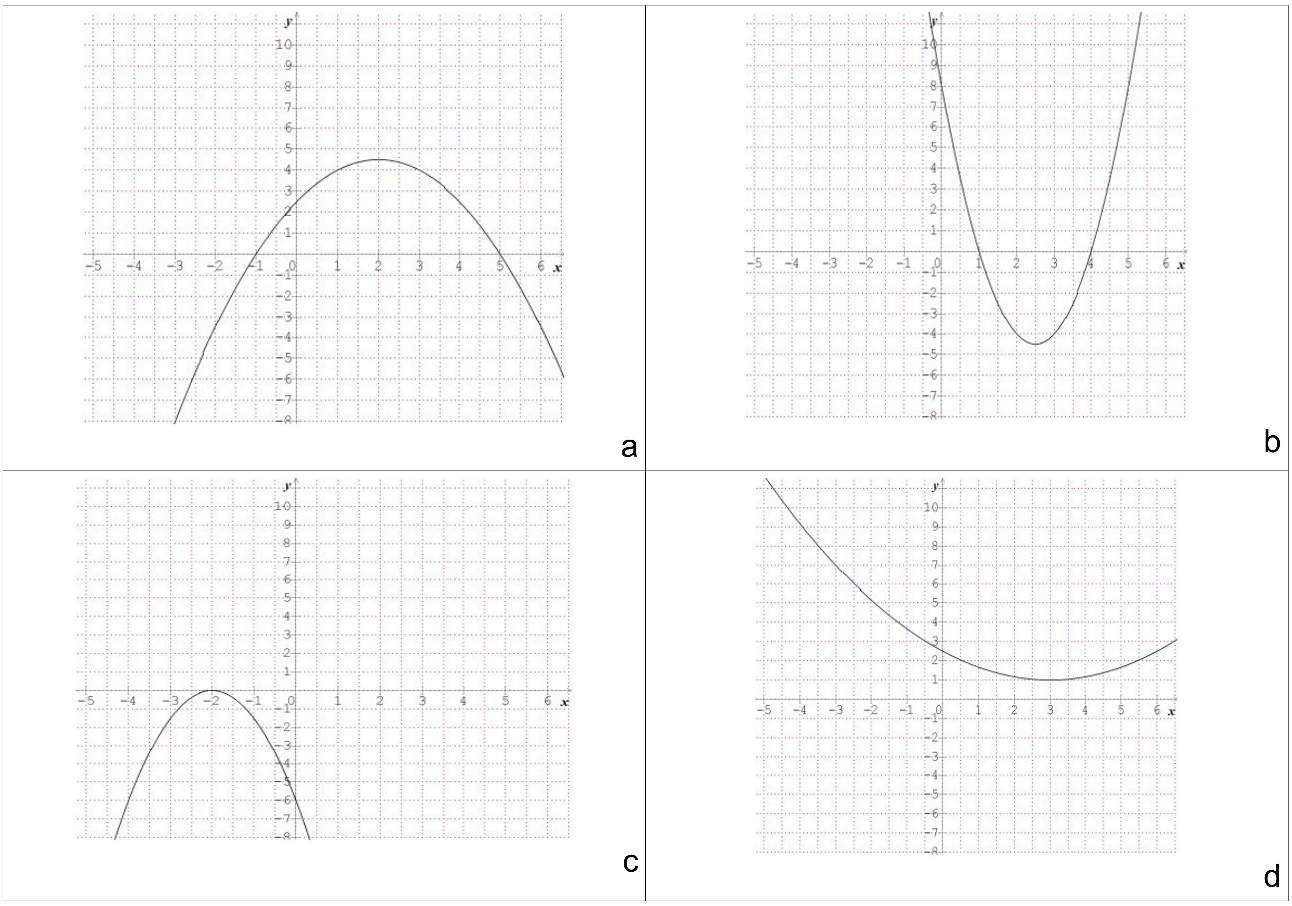
si $\Delta < 0$, f n'a pas de zéros

si $\Delta = 0$, f a un seul zéro : j

si $\Delta > 0$, f a deux zéros : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $j \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$ (avec la forme réduite)

Exercice 17

Pour chacun des graphes suivants (fonctions quadratiques), indiquer l’extremum, l’ordonnée à l’origine et les zéros.



Exercice 18

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer l’extremum, l’ordonnée à l’origine et les zéros ; puis tracer une esquisse de représentation graphique à partir de ces valeurs.

$f(x)=(x-4)^2-3.5$ $\quad g(x)=-0.5(x+2)^2+4.5$ $\quad h(x)=-2-(x-2.5)^2$

$i(x)=0.2x^2-1.8x+2.8$ $\quad j(x)=0.5x^2-3x+4.5$ $\quad k(x)=-x^2-2x-3$

$l(x)=1.5(x-2)(x-5)$ $\quad m(x)=-0.6(x+2)(x-4)$

Exercice 19

Exprimer les fonctions de l’exercice 17 sous la forme réduite.

Exercice 20

Transformer la forme réduite : $f(x)=-2(x-5)^2+9$ en la forme : $f(x)=a x^2+b x+c$

Exercice 21

$$f(x)=-\frac{1}{2}\frac{g x^2}{\cos^2(\alpha) v_0^2}+\tan(\alpha) x+h_0$$

donne la hauteur d'un projectile en fonction de la distance horizontale x, pour une hauteur initiale h_0, une vitesse initiale v_0 et un angle de tir α (au-dessus de l'horizontale).

g est l'accélération terrestre : elle vaut 9.81 m/s^2

(Pour plus de détails, voir l'article Wikipédia « Trajectoire d'un projectile »)

Prenons α = 45°, h_0 = 0 et v_0 = 15 m/s. Nous obtenons :

$$f(x)=-0.0436 x^2+x$$

a) Quelle est la hauteur maximale du projectile ?
b) À quelle distance horizontale du lieu de lancement le projectile retombe-t-il sur le sol ?

Exercice 22

Soit un portail dont le contour est la partie de signe positif de la parabole ayant pour zéros 0 et 1.8, et ayant pour extremum <0.9 ; 2.7>. L'unité est le mètre. Nous aimerions faire passer par ce portail une caisse rectangulaire de 2.4 m de haut. Quelle largeur peut-elle avoir au plus ?

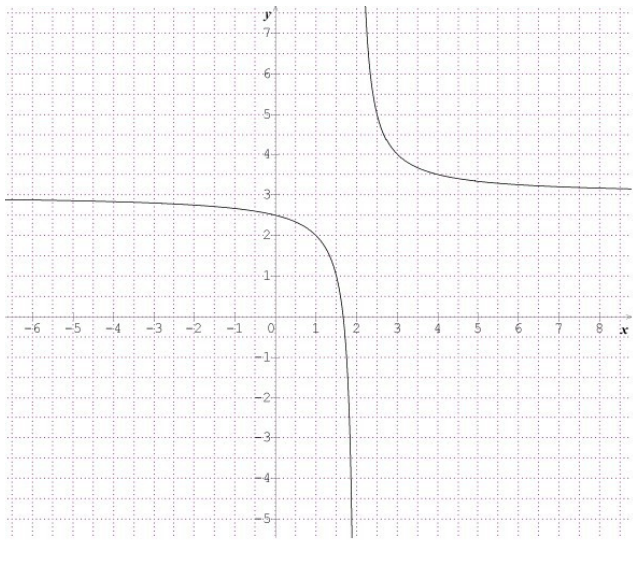
Exercice 23

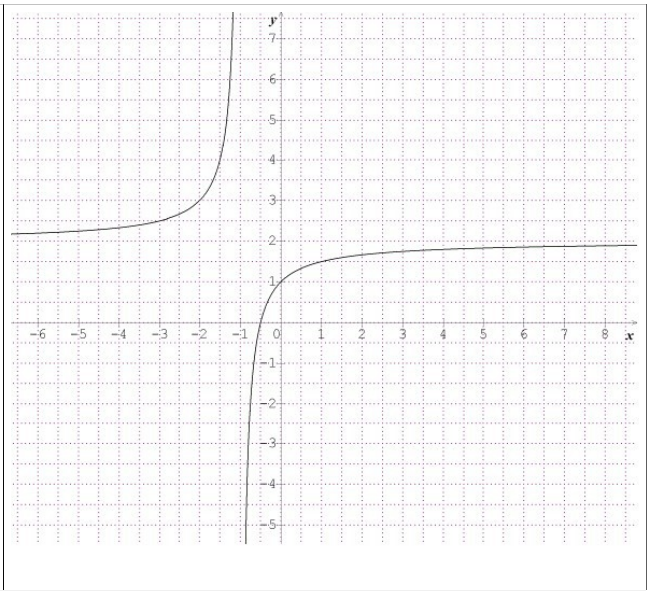
On aimerait construire un portail dont la forme soit un rectangle de base x surmonté d'un demi-disque de diamètre x. Le périmètre doit être de 10 mètres. Exprimer l'aire du portail en fonction de x, puis trouver la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale.

7. Fonctions homographiques

<u>Exemple 7.1</u>

Voici les graphes de $f(x)=3+\dfrac{1}{x-2}$ et de $g(x)=2-\dfrac{1}{x+1}$





Chacune de ces courbes est une <u>hyperbole</u>.

f possède un <u>centre de symétrie</u> en <2 ; 3> ; g en <−1 ; 2>

f possède une discontinuité en x = 2 ; g en x = −1
la droite verticale x = 2, dont se rapprochent les deux branches de f, s'appelle une <u>asymptote verticale</u> de f
la droite verticale x = −1, dont se rapprochent les deux branches de g, s'appelle une asymptote verticale de g
la droite horizontale y = 3, dont se rapprochent les deux branches de f, s'appelle une <u>asymptote horizontale</u> de f
la droite horizontale y = 2, dont se rapprochent les deux branches de g, s'appelle une asymptote horizontale de g

f est strictement décroissante sur]−∞ ; 2[et sur]2 ; +∞[
g est strictement croissante sur]−∞ ; −1[et sur]−1 ; +∞[
f et g ne possèdent aucun extremum local ; ne sont bornées ni supérieurement ni inférieurement

l'ordonnée à l'origine de f est 2.5 ; celle de g est 1
le zéro de f est 5 / 3 ; celui de g est −1 / 2

*

Une <u>fonction homographique</u> est une fonction de la forme $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$
(avec c ≠ 0 et bc − ad ≠ 0)

On peut la mettre aussi sous la forme réduite : $f(x)=r+\frac{p}{x-q}$

Et nous avons : $p=\frac{bc-ad}{c^2}$ $q=-\frac{d}{c}$ $r=\frac{a}{c}$

Le graphe de f est une hyperbole avec un centre de symétrie <q ; r>

Le domaine de f est : D_f = R \ {q}

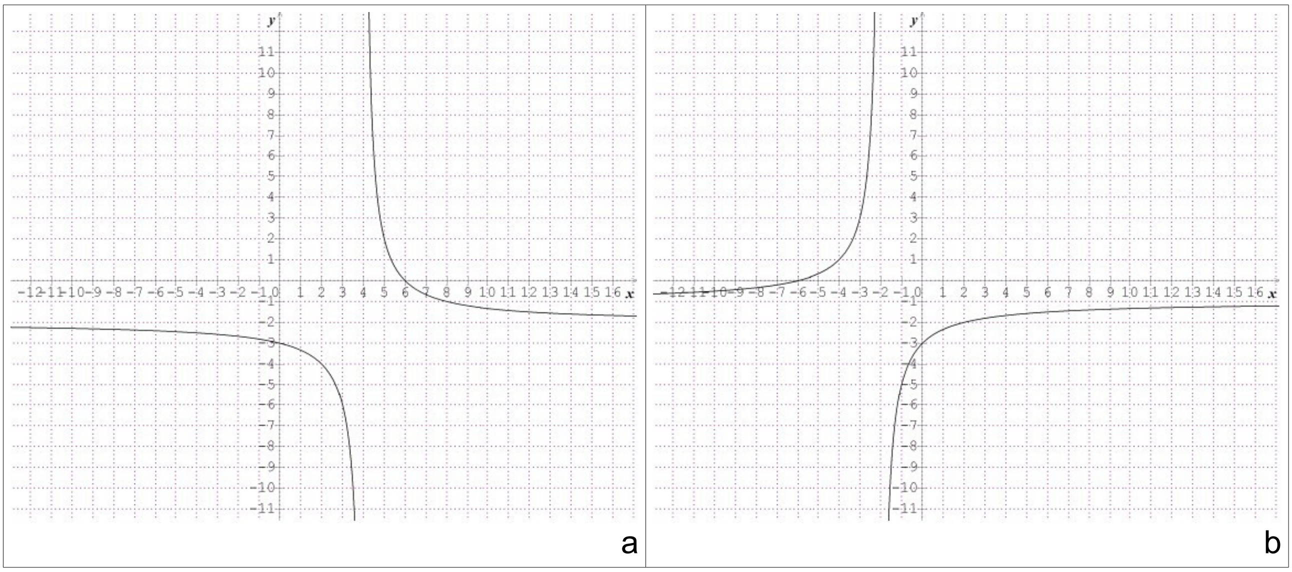
la droite verticale x = q est une asymptote verticale de f
la droite horizontale y = r est une asymptote horizontale de f

si p > 0, f est strictement décroissante sur]−∞ ; q[et sur]q ; +∞[
si p < 0, f est strictement croissante sur]−∞ ; q[et sur]q ; +∞[
f ne possède aucun extremum local ; n'est bornée ni supérieurement ni inférieurement

l'ordonnée à l'origine de f vaut : $\frac{b}{d}$ ou $r-\frac{p}{q}$ (avec la forme réduite)
le zéro de f vaut : $-\frac{b}{a}$ ou $q-\frac{p}{r}$ (avec la forme réduite)

Exercice 24

Pour chacun des graphes suivants (fonctions homographiques), indiquer le centre de symétrie, les asymptotes, l'ordonnée à l'origine et le zéro.



Exercice 25

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer le centre de symétrie, les asymptotes, l'ordonnée à l'origine et le zéro ; puis tracer une esquisse de représentation graphique à partir de ces valeurs.

$f(x)=1.5+\frac{2}{x+2.5}$ $g(x)=3.5-\frac{3}{x-0.5}$

$h(x)=\frac{8x+5}{4x-3}$ $i(x)=\frac{-2x+1}{4x-5}$

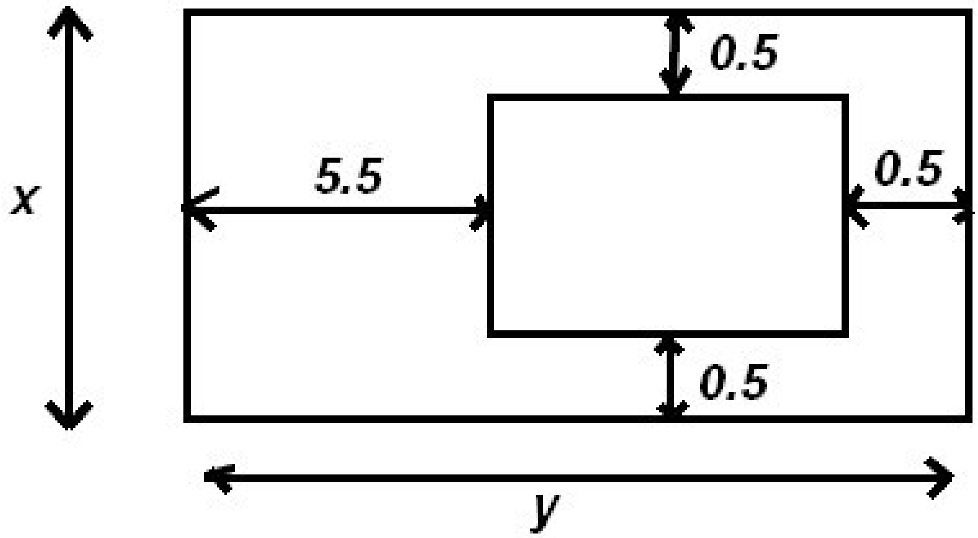
Exercice 26

Exprimer les fonctions de l'exercice 24 sous la forme réduite.

Exercice 27

Transformer la forme réduite : $f(x)=5+\frac{7}{x-3}$ en la forme : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

Exercice 28



Le schéma représente un ancien téléphone portable. Le rectangle intérieur est l'écran, dont la surface est de 16 cm^2. Toutes les cotes sont en cm. Exprimer la fonction qui donne y à partir de x. Puis esquisser graphiquement cette fonction pour x variant de 4 à 7.