9. Extrême gauche et extrême droite

Quand x augmente à l'extrême droite de l'axe horizontal, on dit que x tend vers l'infini, ce qu'on note $x \to +\infty$. De même, quand x diminue à l'extrême gauche de l'axe horizontal, on dit que x tend vers moins l'infini, ce qu'on note $x \to -\infty$.

Comment peut alors évoluer f(x) ? Examinons la situation où $x \to +\infty$ (les choses sont analogues pour $x \to -\infty$).

Si f possède une asymptote horizontale y = h, alors f(x) tend vers h.
Notation : si $x \to +\infty$, alors $f(x) \to h$
C'est par exemple le cas pour les fonctions homographiques.

Si, sur un intervalle $]\alpha ; +\infty[$, f est continue, strictement croissante et non bornée supérieurement, alors f(x) tend vers l'infini.
Notation : si $x \to +\infty$, alors $f(x) \to +\infty$
C'est par exemple le cas pour les fonctions affines, avec a > 0, et pour les fonctions quadratiques, avec a > 0.

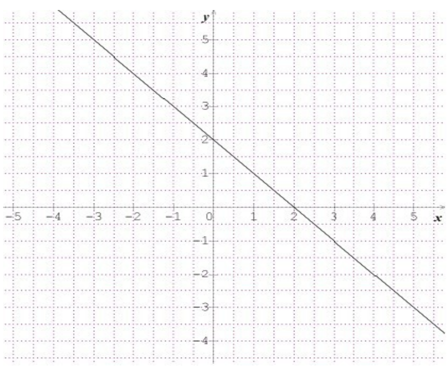
Si, sur un intervalle $]\alpha ; +\infty[$, f est continue, strictement décroissante et non bornée inférieurement, alors f(x) tend vers moins l'infini.
Notation : si $x \to +\infty$, alors $f(x) \to -\infty$
C'est par exemple le cas pour les fonctions affines, avec a < 0, et pour les fonctions quadratiques, avec a < 0.

Ces catégories n'épuisent pas toutes les possibilités. Par exemple, une fonction peut osciller à l'infini, auquel cas on ne peut dire que f(x) tende vers quelque chose...

L'aspect seul d'une portion finie du graphe de f ne permet jamais d'affirmer avec certitude quel est le comportement de f quand $x \to \pm\infty$. Une courbe finie peut être prolongée d'une infinité de manières.

Exemple 9.1

La fonction $f(x)=2-x+10^{-30}\cdot x^2$ est quasiment identique à la droite $g(x)=2-x$ sur un intervalle qui va de moins mille milliards à plus mille milliards.



Cette représentation graphique pourrait nous donner à penser que :
si x → +∞, alors f(x) → −∞

Or ce n'est pas le cas, puisque f est une fonction quadratique. Elle doit remonter quand x devient très grand.

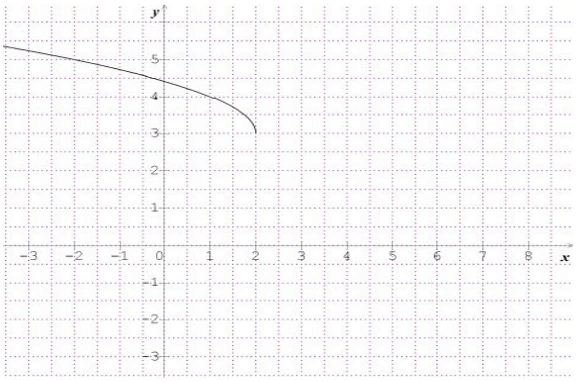
Nous avons :

$$f(10^{30})=2$$
$$f(1.7\cdot10^{30})=1.19\cdot10^{30}+2$$

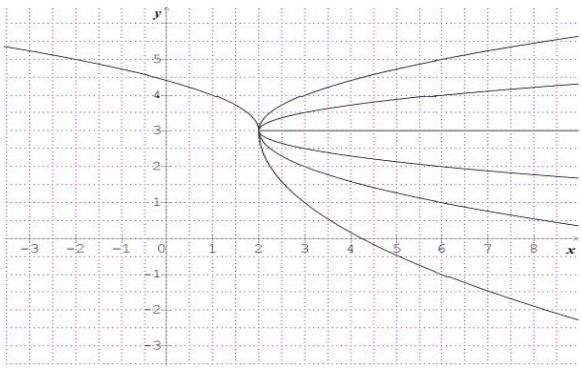
Le véritable comportement à l'infini est : si x → +∞, alors f(x) → +∞

<u>Exemple 9.2</u>

Le graphe suivant :

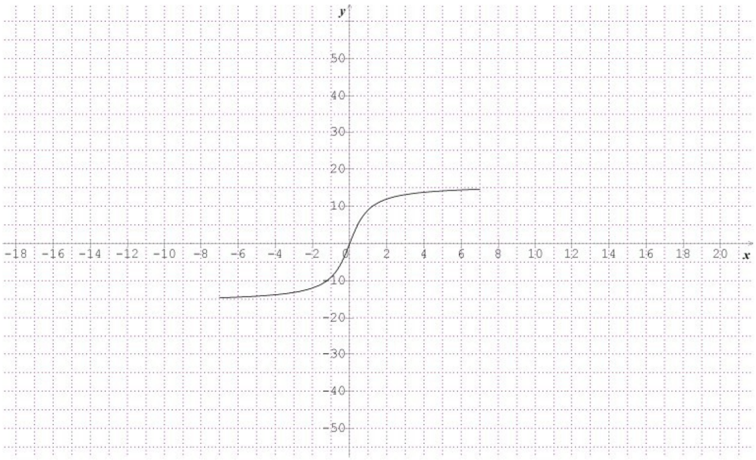
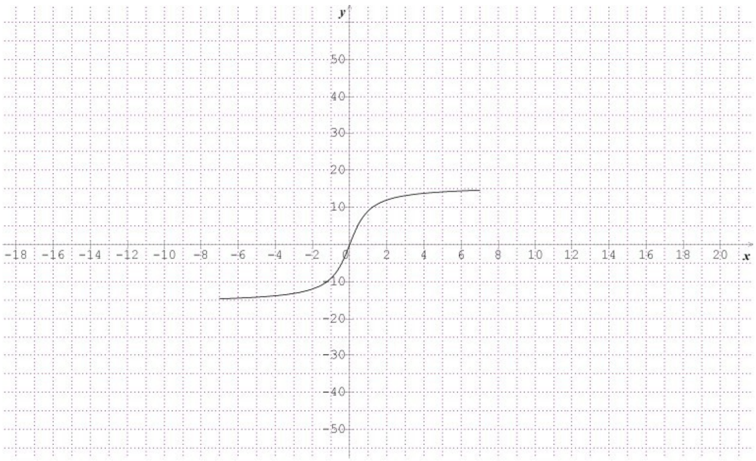
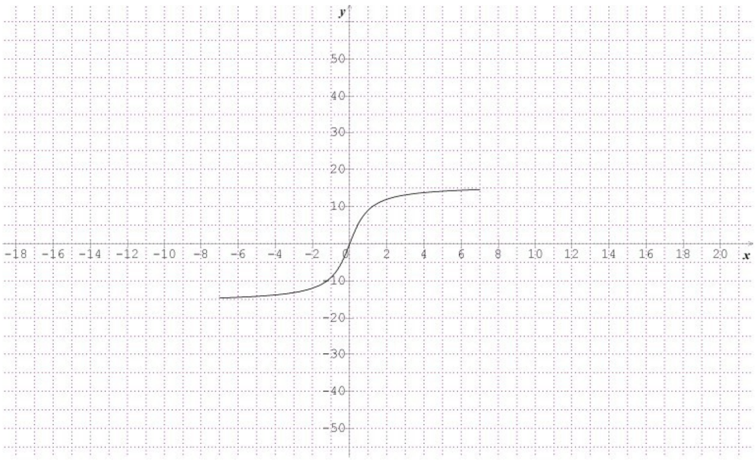


peut être prolongé d'une infinité de manières. En voici quelques unes :



Exercice 31

Donner chaque fois un prolongement continu du graphe de f, à gauche et à droite, de manière à mettre en évidence les contraintes fournies.

	Si x → −∞, alors f(x) → +∞ Si x → +∞, alors f(x) → +∞
	Si x → −∞, alors f(x) → −30 Si x → +∞, alors f(x) → −∞
	Si x → −∞, alors f(x) → 15 Si x → +∞, alors f(x) → −15

Exercice 32

Esquisser graphiquement une fonction continue f qui semble vérifier toutes les conditions suivantes :

$<-4 ; 5>$ est un maximum local (ce n’est pas forcément le seul)
$<0 ; 2>$ est un minimum local (ce n’est pas nécessairement le seul
-3 est un zéro (ce n’est pas nécessairement le seul)
si $x \to -\infty$, alors $f(x) \to -\infty$
si $x \to +\infty$, alors $f(x) \to -\infty$

Exercice 33

Esquisser graphiquement une fonction continue f qui semble vérifier toutes les conditions suivantes :

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 2[$
f est strictement croissante sur $]2 ; +\infty[$
si $x \to -\infty$, alors $f(x) \to +\infty$
si $x \to +\infty$, alors $f(x) \to -3$

10. Résolution graphique d'équations

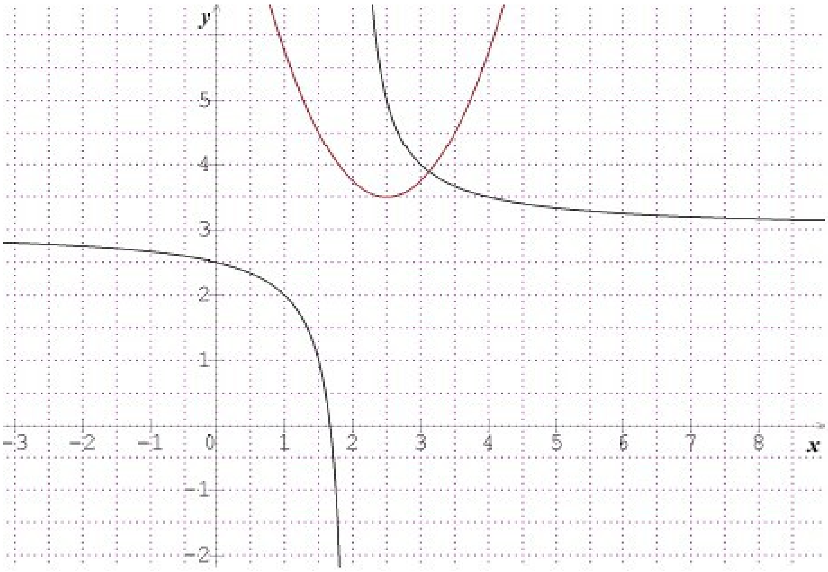
Une équation de la forme $f(x)=g(x)$ peut être résolue approximativement en représentant sur un même repère les graphes de f et de g, puis en précisant les valeurs horizontales des points d'intersection.

Exemple 10.1

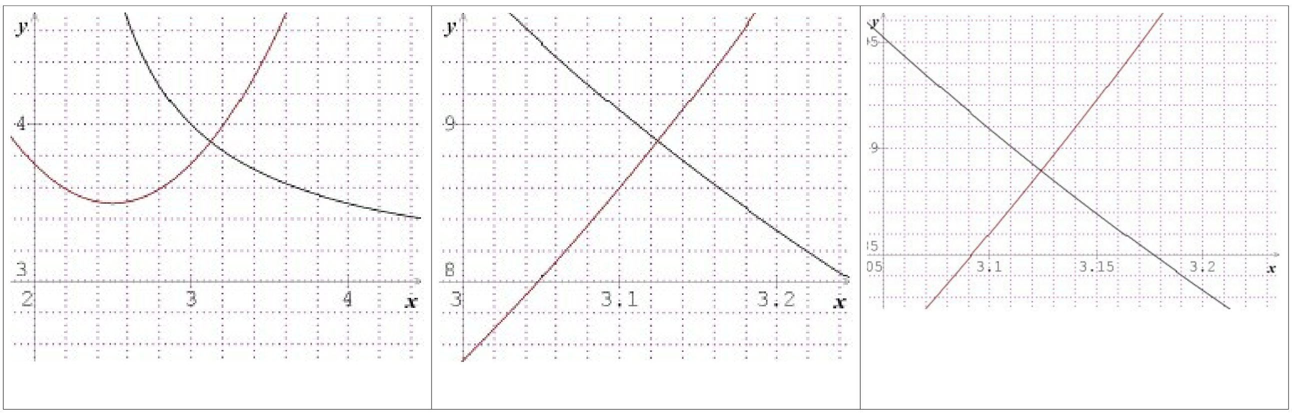
Pour résoudre l'équation $3+\frac{1}{x-2}=3.5+(x-2.5)^2$,

posons $f(x)=3+\frac{1}{x-2}$ et $g(x)=3.5+(x-2.5)^2$

Représentons ces fonctions graphiquement :



et zoomons sur l'intersection :



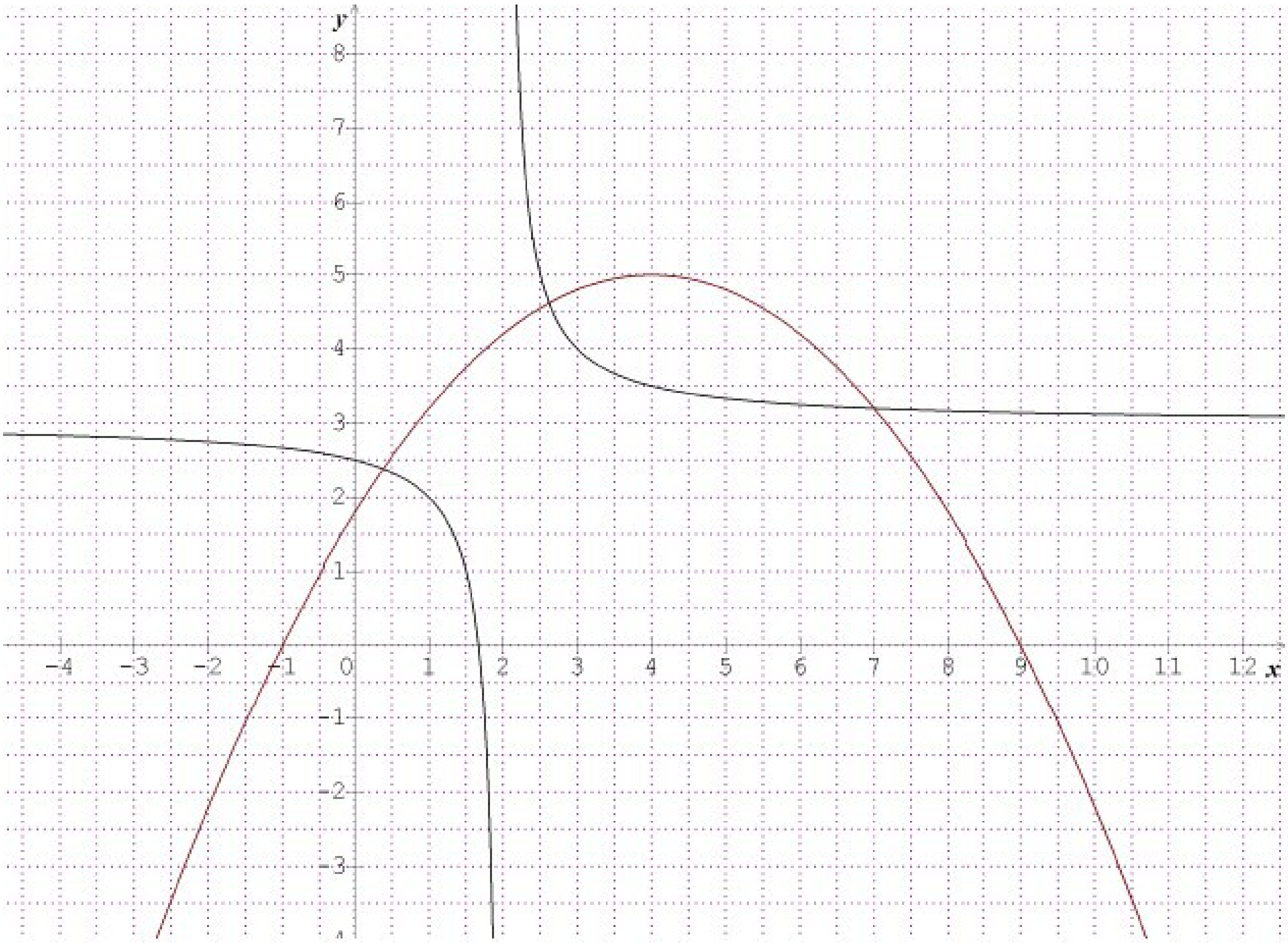
On voit que la solution est environ 3.125

Exemple 10.2

Pour résoudre l'équation $3+\dfrac{1}{x-2}=5-0.2(x-4)^2$,

posons $f(x)=3+\dfrac{1}{x-2}$ et $g(x)=5-0.2(x-4)^2$

Représentons ces fonctions graphiquement :



Il y a trois solutions. Elles valent environ 0.4, 2.6 et 7.

Comment faire sans logiciel graphique ? Il faut d'abord, en calculant quelques points, tracer plus ou moins bien, à la main, les graphes de f et de g, pour localiser à peu près les points d'intersection. À ce stade, si le travail a été bien fait, nous pouvons constater qu'il y a un point d'intersection entre 0 et 1, un autre entre 2 et 3, un dernier en 7. Pour préciser les deux premiers, on remplit des tableaux :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	2.5	2.47	2.44	2.41	2.38	2.33	2.29	2.23	2.17	2.09	2
g(x)	1.8	1.96	2.11	2.26	2.41	2.55	2.69	2.82	2.95	3.08	3.2

Les valeurs les plus proches de f(x) et de g(x) sont pour x = 0.4
(remarque : ici, nous aurions pu arrêter les calculs à partir de 0.5)

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
f(x)	/	13	8	6.33	5.5	5	4.67	4.43	4.25	4.11	4
g(x)	4.2	4.28	4.35	4.42	4.49	4.55	4.61	4.66	4.71	4.76	4.8

Les valeurs les plus proches de f(x) et de g(x) sont pour x = 2.6

Exercice 34

Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a) $0.5x^3 = -3x^2 + 6x$

b) $x^2 - 2 = \sqrt{-x}$

c) $(x-49)(x-51) = \sqrt{x}$

Exercice 35

Soit l'équation a) de l'exercice précédent :

$$0.5x^3 = -3x^2 + 6x$$

On peut la transformer en :

$$0.5x^3 + 3x^2 - 6x = 0$$

La résoudre consiste à chercher les zéros de la fonction :

$$f(x) = 0.5x^3 + 3x^2 - 6x$$

Chercher graphiquement ces zéros.