

Pandigitalisations en base b

par Pascal Kaeser, juin 1999.

1. Introduction

Soit $B = \{0; 1; 2; \dots; b - 1\}$. Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 1. x est dit *pandigital* (en base b) si et seulement si chaque élément de B apparaît au moins une fois dans

son développement en base b : $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j b^{-j} = .x_1 x_2 x_3 \dots$ (où chaque $x_j \in B$). Une

pandigitalisation minimale de x est une troncation $.x_1 x_2 x_3 \dots x_m$ de son développement, telle que chaque élément de B apparaît au moins une fois et l'un d'entre eux apparaît pour la première fois en position m .

Par exemple (en base 10) : $\sqrt{2}/10 = .1414213562373095048801688\dots$ est pandigital et $.1414213562373095048$ est sa pandigitalisation minimale.

Une *pandigitalisation optimale* est une pandigitalisation minimale pour laquelle $m = b$. Une *pandigitalisation optimale exacte* est une pandigitalisation optimale égale à x au sens strict (c'est-à-dire telle que $x_j = 0$ pour tout j supérieur à b).

Par exemple (en base 10) : $106966800000001/25600000000000 = .4178390625\dots$ est une pandigitalisation optimale. Mais elle n'est pas exacte, car le développement complet de cette fraction est : $.41783906250000390625$. Par contre : $94617/64000 = .1478390625$ est une pandigitalisation optimale exacte.

Enfin, l'on parlera de *pandigitalisation optimale périodique* lorsque le développement infini de x est tel que ses b premiers digits forment une pandigitalisation optimale et $x_j = x_k$ si et seulement si $j = k \pmod b$.

Par exemple (en base 10) : $13717421/111111111 = \overline{.0123456789}$ est une pandigitalisation optimale périodique.

2. Exemples en base 6 et 26

Notation : pour toute base b jusqu'à 10, je noterai les digits avec nos chiffres arabes usuels ; pour toute base b supérieure à 10 (mais au plus égale à 26), je noterai les digits avec les majuscules de l'alphabet latin (c'est-à-dire : $A = 0, B = 1, C = 2$, etc.). J'écrirai aussi en base b le numérateur et le dénominateur des fractions x dont je donne une pandigitalisation. Ainsi, par exemple, l'égalité (ici écrite en base 10) : $15/32 = 1/4 + 3/4^2 + 2/4^3 + 0/4^4$ sera notée : $33/200 = .1320$ (écriture en base 4).

Base 6 :

pandigitalisation minimale (non optimale) :

$$12/155 = .04020100301304321405\dots$$

pandigitalisation optimale (non exacte et non périodique) :

$$3353/231043 = .012354\dots$$

pandigitalisation optimale exacte :

$$5/144 = .024513$$

pandigitalisation optimale périodique :

$$11/51 = .\overline{120435}$$

Base 26 :

pandigitalisation minimale (non optimale) :

$$\pi/BA = .DDRSQLOLYRTRODNLHNQTGKUDQGTUIRXNEQBCKBSZIVQQVGDMEL
MUEXROIQIYALVUZVEBBIJPQQLKPLRNCFW\dots$$

pandigitalisation optimale (non exacte et non périodique) :

$$WEZ/YBA = .YABCDEFGHIJKLMNQPQRSTUVWXYZ\dots$$

pandigitalisation optimale exacte :

$$CEGIKMOQS UWZZXVTRPNLJHFD/CAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
= .ABCDEFGHIJKLMZYXWVUTSRQPON$$

pandigitalisation optimale périodique :

$$BDGKPWDLVFRDRFVMDWQLHECB/BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
= .\overline{ABCDEFGHIJKLMNQPQRSTUVWXYZ}$$

3. Pandigitalisations optimales

Appelons *taille* d'une fraction (en base b) la somme du nombre de digits de son numérateur et du nombre de digits de son dénominateur. Pour chaque base b , définissons les ensembles :

F = l'ensemble des fractions de taille minimale offrant une pandigitalisation optimale périodique

G = l'ensemble des fractions de taille minimale offrant une pandigitalisation optimale exacte

H = l'ensemble des fractions de taille minimale offrant une pandigitalisation optimale

Notons $\chi(\dots)$ la taille des fractions de l'un ou l'autre de ces ensembles. Il va de soi que :
 $\chi(H) \leq \chi(F)$ et $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Concernant G , il est relativement facile de montrer les résultats suivants :

- $\chi(G) \leq 2b - 1$
- Si b est premier, alors $\chi(G) = 2b - 1$ et G est formé des $(b - 1)!$ fractions de la forme

$$\frac{\sum_{j=1}^{b-1} x_j b^{b-j-1}}{b^{b-1}}$$
, où $(x_1, x_2, \dots, x_{b-1})$ est une permutation de $(1, 2, \dots, b - 1)$.
- Si b est une puissance (supérieure à 1) d'un nombre premier, alors $\chi(G) \geq 2b - 3$.

Concernant F et G : Soit x une fraction offrant une pandigitalisation optimale périodique en base b : $\overline{.x_1x_2\dots x_b}$, alors $y = \left(1 - \frac{1}{b^b}\right)x$ offre une pandigitalisation optimale exacte : $.x_1x_2\dots x_b$ et tout z tel que $0 \leq z - y < \frac{1}{b^b}$ offre une pandigitalisation optimale dont les b premiers digits coïncident avec ceux de y .

Posons : $t = \sum_{j=1}^b x_j b^{b-j}$,

$$t_{\min} = \sum_{j=1}^b (j-1)b^{b-j} = \frac{b^b - b^2 + b - 1}{(b-1)^2}, \quad t_{\max} = \sum_{j=1}^b (b-j)b^{b-j} = \frac{b(b^{b+1} - 2b^b + 1)}{(b-1)^2}$$

On a :

- t est un entier dont les x_j forment le développement en base b .
- t_{\min} et t_{\max} sont des entiers qui encadrent t .
- $x = \frac{t}{b^b - 1}$ et $y = \frac{t}{b^b}$.

Soit f un diviseur (plus grand que 1) de $b^b - 1$. Posons $g = \frac{b^b - 1}{f}$. Soit $c = dg$ un multiple de

g compris entre t_{\min} et t_{\max} (c'est-à-dire : $\frac{t_{\min}}{g} \leq d \leq \frac{t_{\max}}{g}$). Convertissons c en base b :

$c = \sum_{j=1}^b c_j b^{b-j}$. Si $\{c_1; c_2; \dots; c_b\} = B$, alors : $\frac{c}{b^b - 1} = \frac{dg}{fg} = \frac{d}{f}$ offre une pandigitalisation

optimale périodique : $\overline{.c_1c_2\dots c_b}$. Le même procédé, en remplaçant $b^b - 1$ par b^b , offre une pandigitalisation optimale exacte.

Intérêt : En parcourant les plus petits diviseurs f de $b^b - 1$ (respectivement de b^b), on a des chances de capturer assez rapidement les plus simples fractions d/f offrant une pandigitalisation optimale périodique (respectivement exacte).

Détermination de F, G et H pour quelques valeurs de b :

Base 2 :

$$F = \{1/11 = \overline{.01}\} \quad G = \{1/10 = .10\} \quad H = F \cup G$$

Base 3 :

$$F = \{12/222 = \overline{.012}; 21/222 = \overline{.021}\}$$

$$G = \{12/100 = .120; 21/100 = .210\}$$

$$H = \{1/12 = .012\dots; 2/21 = .021\dots\}$$

Base 4 :

$$F = \{2/101 = \overline{.0132}; 3/101 = \overline{.0231}\}$$

$$G = \{33/200 = .1320\}$$

$$H = \{2/31 = .0213\dots; 3/32 = .0312\dots\}$$

Base 5 :

$$F = \{14/1032 = \overline{.01243}; 21/1032 = \overline{.01432}\}$$

$$G \text{ comporte 24 éléments (le plus petit est } 1234/10000 = .12340)$$

$$H = \{1/12 = .03241\dots; 2/14 = .10234\dots\}$$

Base 6 :

$$F = \{2/51 = \overline{.021534}; 4/51 = \overline{.043512}\}$$

$$G = \{5/144 = .024513; 23/52 = .245130\}$$

$$H = \{1/34 = .013452\dots; 4/21 = .150243\dots\} \cup F$$

Base 7 :

$$F = \{524/36412 = \overline{.0123465}; 632/36412 = \overline{.0143256}; 634/36412 = \overline{.0143625}\}$$

$$G \text{ comporte 720 éléments (le plus petit est } 123456/1000000 = .1234560)$$

$$H = \{1/36 = .0154632\dots; 2/45 = .0265341\dots; 4/43 = .0621543\dots; 5/45 = .1026534\dots\}$$

Base 8 :

$$F = \{5/335 = \overline{.01345267}; 5/361 = \overline{.01247653}; 6/361 = \overline{.01457632}\}$$

$$\chi(G) = 13$$

$$H = \{3/141 = .01765342\dots; 7/121 = .05417632\dots; 14/53 = .21670435\dots;$$

$$37/53 = .56107342\dots\} \cup F$$

Base 9 :

$$F = \{ 25 / 608 = \overline{.036842175}; 32 / 608 = \overline{.046713852}; 87 / 608 = \overline{.138520467}; \\ 12 / 635 = \overline{.016428375}; 27 / 635 = \overline{.038157624}; 36 / 635 = \overline{.051387246}; \\ 52 / 635 = \overline{.073126485}; 83 / 635 = \overline{.126485073} \}$$

$$\chi(G) = 15$$

$$H = \{ 7/55 = .123047658... \}$$

Base 10 :

$$5 \leq \chi(F) \leq 10 \quad 4 \leq \chi(G) \leq 10 \quad H = \{ 1/38 = .0263157894... \}$$

Base 11 :

$$4 \leq \chi(F) \leq 20$$

G comporte 3'628'800 éléments de taille 21

$$H = \{ B/BC = .AJDECFKBHGL... \}$$

Base 12 :

$$F = \{ J / FFF = \overline{.ABHJIKCGFELD} \}$$

$$6 \leq \chi(G) \leq 17$$

$$H = \{ L/FI = .BLDGECJKHAIF... \}$$

Base 13 :

$$4 \leq \chi(F) \leq 21$$

G comporte 479'001'600 éléments de taille 25.

$$H = \{ F/DK = .BEDCFAGLIJKHM... \}$$

Base 14 :

$$4 \leq \chi(F) \leq 12 \quad 6 \leq \chi(G) \leq 22 \quad H = \{ J/IH = .BALHFKJMENCGID... \}$$

Base 15 :

$$4 \leq \chi(F) \leq 24 \quad 10 \leq \chi(G) \leq 24 \quad 4 \leq \chi(H) \leq 24$$

Base 16 :

$$F = \{ H / CIB = \overline{.ACMLKOIGPNDEFBHI} \} \quad \chi(G) = 29 \quad \chi(H) = 4 (F \subset H)$$

4. Conclusion et références

Jusqu'à preuve du contraire, les pandigitalisations peuvent être considérées comme un sujet qui relève de la théorie des nombres, des curiosités mathématiques et de l'exploration sur ordinateur.

A la source de cet article figurent le chapitre 2 du livre de Jean-Paul Delahaye : *Le fascinant nombre π* , Belin, 1997, ainsi qu'un e-mail d'Eric Angelini : *Pangrammatisation de π* , Liste Oulipo, 11/06/99.