Introduction aux probabilités dans un univers fini

1. Définitions de base

Considérons une expérience dont les résultats possibles forment un ensemble fini Ω que nous baptisons univers. Supposons qu'il n'y ait dans cet univers aucune raison pour qu'un résultat se produise plus souvent qu'un autre : les résultats sont alors dits équiprobables. Considérons maintenant un sous-ensemble (ou partie) A de Ω, défini par un critère. Ce sous-ensemble A reçoit le nom d'événement.

La taille d'un ensemble (on dit aussi son cardinal) est le nombre d'éléments qu'il contient. Notons t(A) la taille de A et t(Ω) la taille de Ω.

Le rapport : $\frac{t(A)}{t(\Omega)}$ s'appelle la probabilité de A, notée Pr(A).

Il arrive souvent que Ω soit un ensemble d'ensembles ou un ensemble de listes.

Exemple 1.1

Expérience : On lance un dé (à 6 faces, comme toujours dans ce cours).

Univers : Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} t(Ω) = 6

Événement : A : Le résultat est plus grand que 4
A = {5 ; 6} t(A) = 2

Pr(A) = 2 / 6 = 33.33 %

Événement : B : Le résultat est pair
B = {2 ; 4 ; 6} t(B) = 3

Pr(B) = 3 / 6 = 50 %

Exemple 1.2

Expérience : On lance une pièce de monnaie 2 fois. On note F quand elle donne « Face » et P quand elle donne « Pile ».

Univers : Ω = {[P ; P] ; [P ; F] ; [F ; P] ; [F ; F]} ou plus simplement
Ω = {PP ; PF ; FP ; FF} t(Ω) = 4

Événement : A : La pièce donne au moins une fois P
A = {PP ; PF ; FP} t(A) = 3

Pr(A) = 3 / 4 = 75 %

Exemple 1.3

Le tableau suivant classe le personnel d'une entreprise en fonction de 2 critères.

	Cadres	**Ouvriers**	**Totaux**
Hommes	100	200	300
Femmes	50	150	200
Totaux	150	350	500

a) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans cette entreprise soit un ouvrier ?

Univers : Ω = ensemble du personnel $t(\Omega) = 500$
Événement : A = sous-ensemble des ouvriers $t(A) = 350$

$Pr(A) = 350 / 500 = 70\ \%$

b) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans cette entreprise soit une femme cadre ?

Univers : Ω = ensemble du personnel $t(\Omega) = 500$
Événement : B = sous-ensemble des femmes cadres $t(B) = 50$

$Pr(B) = 50 / 500 = 10\ \%$

c) Quelle est la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans cette entreprise soit un ouvrier ?

Univers : V = ensemble du personnel masculin $t(V) = 300$
Événement : C = sous-ensemble des ouvriers dans V $t(C) = 200$

$Pr(C) = 200 / 300 = 66.67\ \%$

d) Quelle est la probabilité qu'un cadre choisi au hasard dans cette entreprise soit une femme ?

Univers : W = ensemble du personnel cadre $t(W) = 150$
Événement : D = sous-ensemble des femmes dans W $t(D) = 50$

$Pr(D) = 50 / 150 = 33.33\ \%$

Faire la première partie des exercices

2. Dénombrement parmi des résultats équiprobables

Dans cette division, nous allons examiner sur quelques exemples comment les arrangements et les combinaisons peuvent permettre le calcul de certaines probabilités.

Exemple 2.1

Expérience : On lance une pièce de monnaie 5 fois. On note F quand elle donne « Face » et P quand elle donne « Pile », par exemple un résultat possible est FPFPP.

Univers : Ω est l'ensemble des « mots » de 5 lettres qu'on peut former à partir d'un alphabet de 2 lettres.

$$t(\Omega)=\overline{A_5^2}=2^5=32$$

Événement : A : F apparaît exactement 3 fois.

A = {FFFPP ; FFPFP ; etc.}

$t(A)=C_3^5=10$ (il faut choisir 3 positions parmi 5 pour écrire F)

Pr(A) = 10 / 32 = 31.25 %

Remarque : Au lieu de lancer la pièce 5 fois de suite, il est possible de lancer 5 pièces identiques en une seule fois et de considérer dans Ω des combinaisons avec répétitions plutôt que des arrangements avec répétitions. Mais cela pose un problème. Des résultats sous forme de combinaisons avec répétitions ne sont pas équiprobables. Par exemple {{F ; P ; P ; P ; P}} se produit 5 fois plus souvent que {{P ; P ; P ; P ; P}}, car, même si nous ne distinguons pas visuellement les 5 pièces, ce sont physiquement 5 objets différents ; ainsi, le F peut être produit par chacune des 5 pièces. Or la formule Pr(A) = t(A) / t(Ω) n'est valable que dans une situation d'équiprobabilité des résultats.

Exemple 2.2

Expérience : On lance un dé 5 fois. On note la liste des points obtenus, par exemple un résultat possible est 26244.

Univers : Ω est l'ensemble des « mots » de 5 symboles qu'on peut former à partir d'un alphabet de 6 symboles (les 6 chiffres de 1 à 6).

$$t(\Omega)=\overline{A_5^6}=6^5=7'776$$

Événement : A : Le symbole 2 apparaît exactement 3 fois.

A = {22234 ; 22352 ; 62622 ; etc.}

$t(A)=C_3^5\cdot 5^2=250$ (il faut choisir 3 positions parmi 5 pour écrire 2 ; les 2 positions restantes peuvent chacune être occupées par 5 symboles)

Pr(A) = 250 / 7'776 = 3.22 %

Remarque : La remarque de l'exemple précédent peut être transposée à cette expérience.

Exemple 2.3

Expérience : On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 52. L'ordre compte, donc les résultats sont des arrangements sans répétitions, par exemple [6 ♠ ; K ♣ ; Q ♠ ; 6 ♥ ; 3 ♦].

Univers : Ω est l'ensemble des arrangements sans répétitions de 5 cartes parmi 52.

$$t(\Omega)=A_5^{52}=311'875'200$$

Événement : A : La séquence de 5 cartes comporte exactement 3 cœurs.

$$t(A)=C_3^5 \cdot A_3^{13} \cdot A_2^{39}=25'431'120$$

(il faut choisir 3 positions parmi 5 pour les cœurs ; ces positions peuvent être occupées de A_3^{13} manières, puisqu'il y a 13 cœurs dans un jeu de 52 cartes ; les 2 positions restantes peuvent être occupées de A_2^{39} manières, puisqu'il faut prendre 2 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des cœurs)

Pr(A) = 25'431'120 / 311'875'200 = 8.15 %

Exemple 2.4

Expérience : On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 52. L'ordre ne compte pas, donc les résultats sont des combinaisons sans répétitions.

Univers : Ω est l'ensemble des combinaisons sans répétitions de 5 cartes parmi 52.

$$t(\Omega)=C_5^{52}=2'598'960$$

Événement : A : L'ensemble de 5 cartes (on parle de « main ») comporte exactement 3 cœurs.

$$t(A)=C_3^{13} \cdot C_2^{39}=211'926$$

(il faut choisir 3 cartes parmi les 13 cœurs et 2 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des cœurs)

Pr(A) = 211'926 / 2'598'960 = 8.15 %

Remarque : Que l'ordre compte ou non, nous constatons que la probabilité est la même dans les exemples 2.3 et 2.4.

Exemple 2.5

Expérience : D’un jeu de 52 cartes, on tire au hasard 5 fois une carte. Après chaque tirage, on note le nom de la carte (par exemple dame de cœur), on la remet dans le paquet qu’on mélange avant de procéder à un nouveau tirage au hasard. On parle de tirage avec remise.

Univers : Ω est l’ensemble des arrangements avec répétitions de 5 cartes parmi 52.
$t(\Omega)=\overline{A}_5^{52}=52^5=380'204'032$

Événement : A : La séquence de 5 cartes comporte exactement 3 cœurs.
$t(A)=C_3^5 \cdot 13^3 \cdot 39^3=33'416'370$
(il faut choisir 3 positions parmi 5 pour les cœurs ; ces positions peuvent être occupées de 13^3 manières, puisqu’il y a 13 cœurs dans un jeu de 52 cartes ; les 2 positions restantes peuvent être occupées de 39^2 manières, puisqu’il faut prendre 2 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des cœurs)

Pr(A) = 33’416’370 / 380’204’032 = 8.79 %

Faire la deuxième partie des exercices

3. Opérations sur les ensembles, quelques formules

Soit A un sous-ensemble de Ω. Rappelons que nous avons défini :

Formule 1 : si les résultats de Ω sont équiprobables, alors $\Pr(A) = t(A) / t(\Omega)$

En particulier :

$$\Pr(\varnothing) = 0 \text{ et } \Pr(\Omega) = 1$$

Ces deux extrêmes font qu'une probabilité est toujours comprise
entre 0 (événement impossible) et 1 (événement certain).

<u>Exemple 3.1</u>

Expérience : On lance un dé.

Pr(le résultat est pair et impair) = 0

Pr(le résultat est pair ou impair) = 1

*

Ω\A (« Ω sauf A »), noté aussi ¬A (« non A »), est le sous-ensemble de Ω, formé des éléments qui ne sont pas dans A.

Nous avons : $t(A) + t(\neg A) = t(\Omega)$.

En divisant toute l'équation par t(Ω),

nous obtenons : $\Pr(A) + \Pr(\neg A) = 1$.

Cela donne :

Formule 2 : $\Pr(\neg A) = 1 - \Pr(A)$ $\Pr(A) = 1 - \Pr(\neg A)$

Exemple 3.2

Expérience : On lance une pièce de monnaie 5 fois.

Univers : Ω est l'ensemble des « mots » de 5 lettres qu'on peut former à partir d'un alphabet de 2 lettres : F et P.

$$t(\Omega)=\overline{A_5^2}=2^5=32$$

Événement : A : F apparaît au moins une fois.

¬A : F n'apparaît jamais.
¬A = {PPPPP}
t(¬A) = 1

Pr(A) = 1 − Pr(¬A) = 1 − (1 / 32) = 31 / 32 = 96.88 %

*

A ∩ B est l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.
C'est l'événement (A et B)

A U B est l'ensemble formé des éléments qui sont dans A ou dans B
(le « ou » n'étant pas exclusif).
C'est l'événement (A ou B)

Nous avons t(A U B) = t(A) + t(B) − t(A ∩ B). En divisant toute l'équation par t(Ω), nous obtenons :

Formule 3 : Pr(A U B) = Pr(A) + Pr(B) − Pr(A ∩ B)

Exemple 3.3

Expérience : On lance un dé.

Univers : Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

Événement : A : Le résultat est plus grand que 4.
A = {5 ; 6}

Événement : B : Le résultat est pair
B = {2 ; 4 ; 6}

Pr(A) = 2 / 6
Pr(B) = 3 / 6

¬A = {1 ; 2 ; 3 ; 4}	Pr(¬A) = 4 / 6	1 − Pr(A) = 1 − 2 / 6 = 4 / 6
¬B = {1 ; 3 ; 5}	Pr(¬B) = 3 / 6	1 − Pr(B) = 1 − 3 / 6 = 3 / 6

$A \cap B = \{6\}$ $\Pr(A \cap B) = 1 / 6$
$A \cup B = \{2 ; 4 ; 5 ; 6\}$ $\Pr(A \cup B) = 4 / 6$

$\Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = 2 / 6 + 3 / 6 - 1 / 6 = 4 / 6$

*

Cas particulier de la formule 3 :

Formule 4 : Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

Autrement dit, les probabilités s'additionnent pour une réunion d'événements disjoints.

*

Après une formule d'addition, voici une formule de multiplication, que nous justifierons plus tard.

La probabilité d'un événement B sous la condition que l'événement A se soit réalisé

se note $\Pr(B|A)$ On parle de probabilité conditionnelle.

Formule 5 : $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$

Exemple 3.4

Expérience : 2 cartes sont tirées au hasard d'un jeu de 52. L'ordre compte et le tirage se fait sans remise.

Univers : Ω est l'ensemble des arrangements sans répétitions de 2 cartes parmi 52

Événement : A : La 1^{re} carte est la dame de cœur.
Événement : B : La 2^{e} carte est une dame.

$\Pr(A \cap B)$ = Probabilité de tirer successivement la dame de cœur et une autre dame

$\Pr(A) = 1 / 52$
$\Pr(B|A) = 3 / 51$ (si la 1^{re} carte tirée est la dame de cœur, il ne reste que 51 cartes pour le 2^{e} tirage et, parmi elles, 3 dames)

Donc la probabilité de tirer successivement la dame de cœur et une autre dame vaut :
$\frac{1}{52} \cdot \frac{3}{51} = 0.11\ \%$

Faire la troisième partie des exercices

4. Résultats non équiprobables, arboriculture et loi binomiale

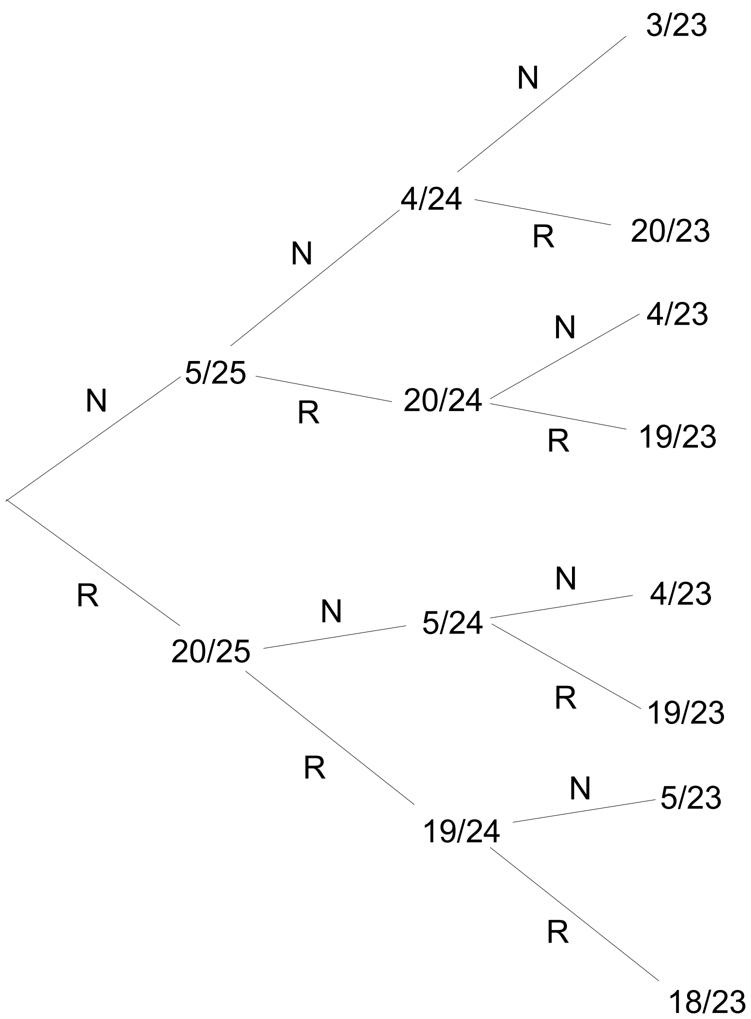
Exemple 4.1

Expérience : D'une urne contenant 20 boules rouges (R) et 5 boules noires (N), on tire au hasard (sans remise) 3 boules. L'ordre compte.

Si l'univers que nous voulons considérer n'est pas celui des $A_3^{25}=13'800$ arrangements sans répétitions de 3 boules, mais celui des $\overline{A_3^2}=2^3=8$ arrangements avec répétitions de 2 couleurs, alors les résultats ne sont pas équiprobables. Par exemple RNN est un résultat plus probable que NNN.

Considérons l'événement A : La boule tirée en 2^e position est noire.

Le calcul de Pr(A) peut se baser sur les formules 4 et 5, mises en œuvre sur un arbre de probabilités.



L'événement A est la réunion des 4 résultats : NNN, NNR, RNN, RNR

La formule 4 donne :

Pr(A) = Pr(NNN) + Pr(NNR) + Pr(RNN) + Pr(RNR)

La formule 5 donne :

Pr(NNN) = $\frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} = \frac{60}{13'380}$

Pr(NNR) = $\frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{20}{23} = \frac{400}{13'380}$

Pr(RNN) = $\frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{4}{23} = \frac{400}{13'380}$

Pr(RNR) = $\frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{19}{23} = \frac{1'900}{13'380}$

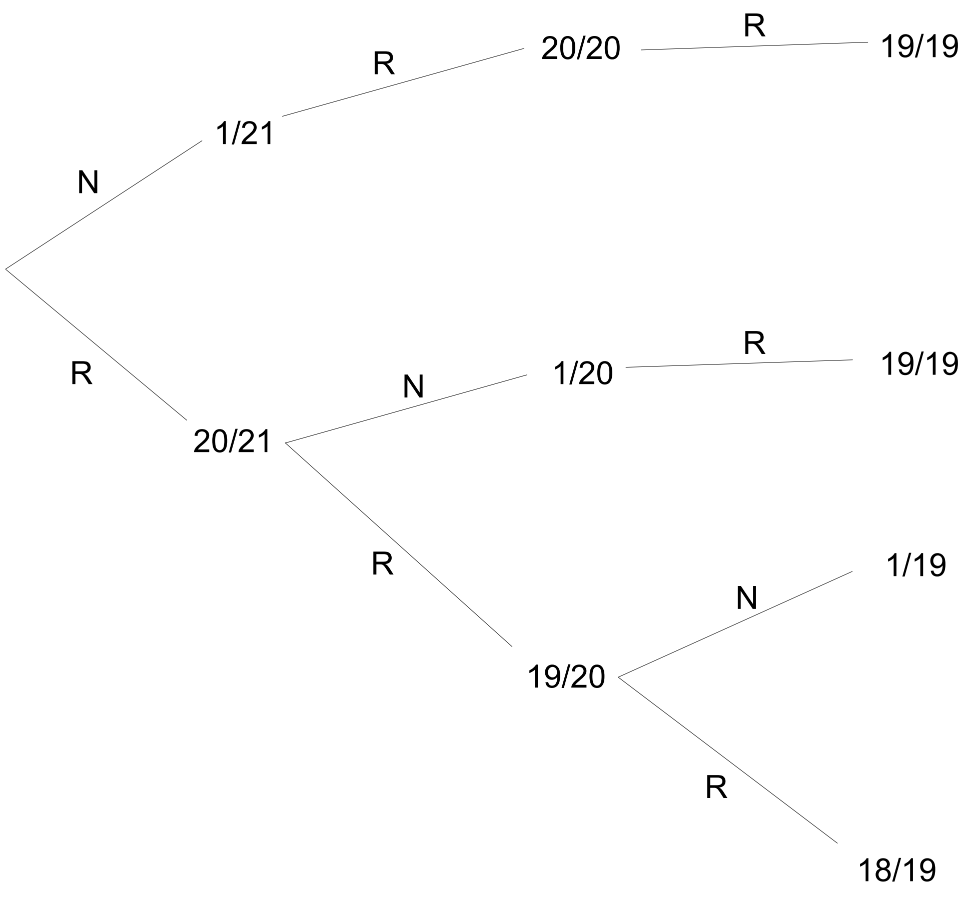
La somme donne alors :

Pr(A) = 2'760 / 13'380 = 20 %

Exemple 4.2

Modifions l'exemple précédent en partant d'une urne contenant
20 boules rouges (R) et 1 seule boule noire (N).
À nouveau, on tire au hasard (sans remise) 3 boules, et l'ordre compte.
On s'intéresse toujours à l'événement A : La boule tirée en 2^e position est noire.

L'arbre est moins branchu.



L'événement A ne correspond qu'à un seul résultat : RNR

Nous avons donc :

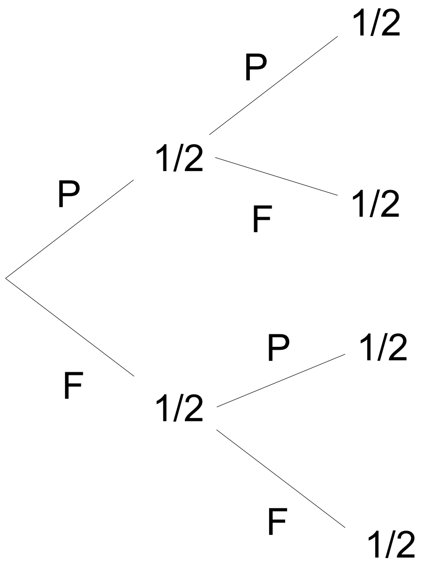
Pr(A) = Pr(RNR) = $\frac{20}{21} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{19}$ = 4.76 %

*

Remarque : L'arbre, comme aide visuelle, et les formules 4 et 5 peuvent aussi être utilisés pour résoudre des problèmes avec des résultats équiprobables.

Exemple 4.3

Reprenons l'exemple 1.2 : le lancer d'une pièce 2 fois et la recherche de la probabilité de l'événement A : La pièce donne au moins une fois « Pile ».



Pr(A) = Pr(PP) + Pr(PF) + Pr(FP) =

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=75\%$$

Exemple 4.4

Une pièce est truquée de telle manière qu'elle tombe 3 fois plus souvent sur F que sur P, c'est-à-dire : Pr(F) = 3Pr(P).
Et, comme Pr(P) = 1 − Pr(F) (Formule 2),
en notant x = Pr(F), nous obtenons l'équation : x = 3(1 − x)
dont la solution est x = 3 / 4 = 75 %

Ainsi : Pr(F) = 75 % Pr(P) = 25 %

Expérience : Cette pièce est lancée 7 fois.

Événement : A : La séquence des P et des F comporte exactement 3 F.

$$Pr(A)=C_3^7\cdot 0.75^3\cdot 0.25^4=5.77\%$$

Explication : il y a C_3^7 possibilités de choisir les 3 positions pour écrire F dans des mots de taille 7. Et chacun de ces mots a une probabilité de $0.75^3\cdot 0.25^4$ (multiplication des probabilités sur l'arbre).

Généralisation :

Formule 6 :	Soit une pièce de monnaie avec Pr(F) = a. Alors la probabilité d'obtenir exactement r fois F en n jets vaut : $C_r^n \cdot a^r \cdot (1-a)^{n-r}$ (<u>loi binomiale</u>)

Bien sûr, cette formule reste valable si on remplace F par P. Elle est aussi valable pour n'importe quel phénomène à 2 résultats possibles avec des probabilités constantes.
Par exemple, une loi binomiale identique à celle de l'exemple 4.4 est donnée par le tirage aléatoire d'une boule, *avec remise*, dans une urne contenant

75 % de boules rouges
et 25 % de boules noires.

Faire la quatrième partie des exercices

5. Probabilités conditionnelles et dépendance

Exemple 5.1

Considérons une classe de 30 élèves. 14 sont des filles et 16 des garçons. 17 parlent chinois et 13 ne parlent pas chinois. Plus précisément, toutes les données figurent dans le tableau suivant :

	Filles	**Garçons**	**Totaux**
parlent chinois	10	7	17
ne parlent pas chinois	4	9	13
Totaux	14	16	30

Expérience : Un élève est choisi au hasard.

Événement : A : L'élève parle chinois.
Événement : B : L'élève est une fille.

La probabilité que l'élève soit une fille sous la condition qu'il parle chinois vaut :

Pr(B|A) = Pr(B dans un univers restreint à A) = $\frac{t(B\cap A)}{t(A)}=\frac{10}{17}$

Par ailleurs :

$$\frac{Pr(B\cap A)}{Pr(A)}=\frac{t(B\cap A)/t(\Omega)}{t(A)/t(\Omega)}=\frac{10/30}{17/30}=\frac{10}{17}$$

Cet exemple permet de comprendre que :

Formule 7 : $Pr(B|A)=\frac{Pr(B\cap A)}{Pr(A)}$

C'est une autre façon d'écrire la formule 5.

En permutant A et B, nous avons aussi : $Pr(A|B)=\frac{Pr(A\cap B)}{Pr(B)}$

Exemple 5.2

Expérience : On lance un dé.

Univers : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Événement : A : Le résultat est plus grand que 4
$A = \{5 ; 6\}$ $\quad$ $Pr(A) = 2 / 6 = 33.33$ %

Événement : B : Le résultat est pair
$B = \{2 ; 4 ; 6\}$ $\quad$ $Pr(B) = 3 / 6 = 50$ %

Intersection : $A \cap B = \{6\}$ $\quad$ $Pr(A \cap B) = 1 / 6 = 16.67$ %

Quelle est la probabilité que le résultat soit plus grand que 4 sous la condition qu'il est pair ?

$Pr(A|B) = Pr(A \cap B) / Pr(B) = (1 / 6) / (3 / 6) = 1 / 3 = 33.33$ %

Quelle est la probabilité que le résultat soit pair sous la condition qu'il est plus grand que 4 ?

$Pr(B|A) = Pr(A \cap B) / Pr(A) = (1 / 6) / (2 / 6) = 1 / 2 = 50$ %

*

Deux événements A et B sont dits indépendants quand $Pr(A|B) = Pr(A)$. Un critère équivalent est que $Pr(B|A) = Pr(B)$. Deux événements qui ne sont pas indépendants sont évidemment dits dépendants.

Dans l'exemple 5.1 : $Pr(B|A) = 10 / 17$ et $Pr(B) = 14 / 30$, donc A et B sont dépendants.

Dans l'exemple 5.2 : $Pr(B|A) = 50$ % et $Pr(B) = 50$ %, donc A et B sont indépendants.

La formule 5 donne :

Formule 8 :	A et B sont indépendants si et seulement si $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$

Exemple 5.3

Expérience : D’une urne contenant 20 boules rouges (R) et 5 boules noires (N), on tire au hasard (sans remise) 2 boules. L’ordre compte. L’univers considéré est celui des arrangements avec répétitions de 2 couleurs.

Événement : A : La 1re boule est rouge.
Événement : B : La 2e boule est noire.

Pr(A ∩ B) = Pr(RN) = $\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}$

Pr(A) = Pr(RR) + Pr(RN) = $\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}+\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}=\frac{20}{25}$

Pr(B) = Pr(RN) + Pr(NN) = $\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}=\frac{5}{25}$

Pr(A)Pr(B) = $\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{25}$

Pr(A ∩ B) ≠ Pr(A)Pr(B), donc A et B sont des événements dépendants.

*

La manière un peu compliquée dont nous avons calculé Pr(A) et Pr(B) dans l’exemple précédent illustre une formule connue sous le nom des probabilités totales.

Formule 9 : Si les événements E_i, pour i variant de 1 à n, forment un système complet,
c’est-à-dire : si chaque E_i est non vide ;
si les E_i sont 2 à 2 disjoints ;
si la réunion des E_i donne l’univers ; alors

$$Pr(B)=\sum_{i=1}^{n} Pr(B\cap E_i)=\sum_{i=1}^{n} Pr(E_i)\cdot Pr(B|E_i)$$

Dans le cas où nous n’avons que 2 E_i à considérer :
E_1 = A et E_2 = ¬A

la formule 9 devient :

Formule 10 : Pr(B) = Pr(A)Pr(B|A) + Pr(¬A)Pr(B|¬A)

C'est précisément ce que nous avons fait pour calculer Pr(B) dans l'exemple 5.3

Pr(B) = Pr(RN) + Pr(NN) = $\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}+\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}=\frac{5}{25}$

Détaillons :

	Pr(B) = Pr(A)Pr(B|A) + Pr(¬A)Pr(B|¬A)
A:	R en position 1
B|A :	N en position 2 sous la condition d'avoir R en position 1
¬A :	N en position 1
B|¬A :	N en position 2 sous la condition d'avoir N en position 1

*

Puisque	Pr(A ∩ B) = Pr(B)Pr(A|B)
et	Pr(B ∩ A) = Pr(A)Pr(B|A),
nous avons :	Pr(B)Pr(A|B) = Pr(A)Pr(B|A).

En divisant par Pr(B), nous obtenons :

Formule 11 : $$Pr(A|B)=\frac{Pr(A)\cdot Pr(B|A)}{Pr(B)}$$

(Formule de Bayes)

On l'utilise souvent en lui injectant la formule 9 ou la formule 10.
Ainsi, en remplaçant Pr(B) par la formule 10, il vient :

Formule 12 : $$Pr(A|B)=\frac{Pr(A)\cdot Pr(B|A)}{Pr(A)\cdot Pr(B|A)+Pr(\neg A)\cdot Pr(B|\neg A)}$$

(Formule de Bayes, 2e version)

Reprenons encore une fois l'exemple 5.3 et calculons Pr(A|B) avec cette formule :

$$Pr(A|B)=\frac{Pr(A)\cdot Pr(B|A)}{Pr(B)}=\frac{\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}}{\frac{5}{25}}=\frac{20}{24}$$

Exemple 5.4

Intéressons-nous à une maladie X.

Expérience : Une personne est choisie au hasard dans la population et on lui fait subir un test de détection de la maladie X.

Considérons les événements suivants :

A : La personne est atteinte de la maladie X
B : Le résultat du test est positif, c'est-à-dire le test déclare que la personne est atteinte de la maladie X.

Le test n'est pas parfait. Une étude a permis d'établir que :

Pr(B|A) = 99 %
Pr(B|¬A) = 5 %

Par ailleurs, la maladie est assez rare : elle ne touche qu'une personne sur mille, c'est-à-dire :

Pr(A) = 0.1 %
Pr(¬A) = 99.9 %

Quelle est la probabilité qu'une personne soit atteinte de la maladie X si son résultat au test est positif ?

Utilisons la formule 12 :

$$Pr(A|B)=\frac{Pr(A)\cdot Pr(B|A)}{Pr(A)\cdot Pr(B|A)+Pr(\neg A)\cdot Pr(B|\neg A)}=\frac{0.001\cdot 0.99}{0.001\cdot 0.99+0.999\cdot 0.05}=1.94\%$$

Cette probabilité est faible. Presque tous les malades présentent un test positif ; mais la maladie X est rare, si bien que presque tous les tests positifs vont désigner des personnes saines (faux positifs). Si le traitement est lourd, coûteux ou dangereux, il importe d'effectuer des examens supplémentaires avant de le mettre en œuvre. Le test, malgré sa fiabilité plutôt haute, n'est absolument pas suffisant. L'oubli du taux de base (fréquence de la maladie dans la population) est une erreur qui peut avoir des conséquences graves.

Exemple 5.5

Expérience : Une pièce de monnaie est lancée une 1re fois un jour au hasard ; puis, quelques mois plus tard, elle est lancée une 2e fois un jour au hasard.

Sous la condition :

C : La pièce est tombée au moins une des 2 fois sur « Face » un mardi

quelle est la probabilité qu'elle soit aussi tombée sur « Face » l'autre fois ?

On pourrait penser que la réponse est 50 %.
Nous allons voir que ce n'est pas vrai.

Considérons les événements :

A_1 : Le 1er jour choisi au hasard est un mardi
A_2 : Le 2e jour choisi au hasard est un mardi
B_1 : La pièce tombe sur F au 1er jet
B_2 : La pièce tombe sur F au 2e jet

$C = (B_1 \cap A_1) \cup (B_2 \cap A_2)$

$Pr(C) = Pr(B_1 \cap A_1) + Pr(B_2 \cap A_2) - Pr(B_1 \cap A_1 \cap B_2 \cap A_2) =$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{27}{196}$$
$B_1 \cap B_2 \cap C$ est la réunion de 3 événements disjoints :

$B_1 \cap A_1 \cap B_2 \cap A_2$
$B_1 \cap A_1 \cap B_2 \cap \neg A_2$
$B_1 \cap \neg A_1 \cap B_2 \cap A_2$

d'où :

$$Pr(B_1 \cap B_2 \cap C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{13}{196}$$

La probabilité qui nous intéresse est :

$$Pr((B_1 \cap B_2)|C)=\frac{Pr(B_1 \cap B_2 \cap C)}{Pr(C)}=\frac{13/196}{27/196}=\frac{13}{27}=48.15\,\%$$

Remarque : Les probabilités conditionnelles soulèvent des problèmes délicats comme :
► le problème de Monty Hall
► le paradoxe des deux enfants
► le paradoxe des trois pièces de monnaie
► le paradoxe des trois prisonniers
► l’argument de l’apocalypse

6. Quelques compléments culturels

Non, le calcul des probabilités n’a pas été inventé par des polissons désireux de connaître les chances de tirer une reine en sortant deux boules, mais par des savants géniaux comme
Pascal (1623 – 1662), Fermat (160? – 1665), Christian Huygens (1629 – 1695),
Jakob Bernouilli (1654 – 1705), Abraham de Moivre (1667 – 1754),
Thomas Bayes (1702 – 1761), Laplace (1749 – 1827), Gauss (1777 – 1855),
Markov (1856 – 1922), Kolmogorov (1903 – 1987)

*

Les probabilités sont partout.

En physique et chimie
(mécanique statistique, mécanique quantique, &c.)
En génétique
En neurosciences
En médecine
En économie
En production de marchandises
En psychologie et en sociologie
En linguistique
En intelligence artificielle
En stratégie
En marketing
En sécurité
En philosophie
(voir par exemple le problème de la Belle au bois dormant)
En musique
(Xénakis, OuMuPo, &c.)
En art
(Arp, Noll, OuPeinPo, &c.)
En littérature
(Robert Musil, Mark Haddon, OuLiPo, ALAMO, &c.)

*

Il y a plusieurs « visions » des probabilités.

♠ Une vision purement mathématique, ensembliste, pose des notions a priori et fait l'impasse sur les aspects temporels, sur la manière concrète d'établir des probabilités élémentaires.
♦ Une vision « fréquentiste » fixe les probabilités élémentaires comme des valeurs limites de fréquences observées. Ainsi Buffon, au 18e siècle, a lancé une pièce de monnaie 4'040 fois. La fréquence des F était de 50.69 %. Pearson, au début du 20e siècle, a obtenu une fréquence des F de 50.05 % en lançant une pièce 24'000 fois.

Ces deux visions soulèvent des questions philosophiques. Des désaccords persistent. Certains paradoxes semblent venir d'un conflit entre une notion « réaliste » de probabilité, où le temps joue un rôle (un événement se produit après un autre), et une notion « idéaliste » ou « formaliste » de probabilité, où le temps est ignoré.

*

De nombreuses expériences de psychologie cognitive, notamment celles de Tversky et Kahneman qui valurent au second le prix Nobel d'économie en 2002, montrent que la plupart des gens évaluent des probabilités de manière erronée dans bien des situations. Quelques résultats classiques :

♥ Majoritairement, les gens pensent qu'à longueur égale, certaines séquences de « Pile » et de « Face » sont plus probables que d'autres.
♦ Les faibles probabilités sont souvent surestimées et les fortes sous-estimées.
♣ Souvent les gens surestiment les probabilités des événements qui leur sont favorables et sous-estiment celles des événements qui leur sont défavorables.
♠ Souvent les gens surestiment un risque dans les jours qui suivent une catastrophe ayant marqué les esprits.
♥ Souvent les gens sous-estiment par exemple leur risque d'avoir un accident de la route s'ils n'en ont jamais eu.
♣ Majoritairement, les gens surestiment les probabilités de la forme $Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ...etc.) et sous-estiment celles de la forme $Pr(A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ...etc.).

♣♠ En 1979, les USA étaient en crise à la suite d'une prise d'otages à l'ambassade américaine de Téhéran. Une opération commando (Eagle Claw) en 5 étapes fut conçue par plusieurs administrations (CIA, Navy, Air Force, etc.). Cette opération fut autorisée par le président Jimmy Carter. Pourquoi ? Parce que les responsables de chaque étape avaient jugé que la partie qu'ils dirigeaient avait des chances raisonnables de réussite. L'opération échoua. Après coup, Philip Rozenzweig demanda aux responsables d'évaluer la probabilité de réussite de leur étape. Ils donnèrent des estimations comprises entre 70 % et 90 %. Si on prend une moyenne de 80 % et qu'on fait l'hypothèse, certes un peu abusive, de l'indépendance des 5 étapes, la probabilité de réussite de l'opération était de 0.8^5 = 31.8 %, ce qui n'est pas très élevé. Un expert donna des évaluations plus pessimistes. Il attribua aux 5 étapes des probabilités de réussite de respectivement : 75 %, 60 %, 70 %, 65 % et 55 %. La probabilité composée de la réussite de l'opération vaut alors 11 %. S'il avait été en possession de tels chiffres, Jimmy Carter aurait-il donné le feu vert ?

♣♥ En 1999, un tribunal condamna Sally Clark à la prison à vie. L'accusation soutenait que cette femme avait commis un double meurtre de nourrissons. Son argumentation reposait sur un emploi d'abusif de la formule $Pr(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ dans une situation médicale rare. Rappelons que cette formule n'est vraie que si A_1 et A_2 sont indépendants. Or ce n'était pas le cas... En 2003, la condamnation fut annulée suite au réexamen du dossier.

*

Raisonner. Peser des probabilités sur la balance du désir. (Ambrose Bierce)

*

EN SOULIGNANT AU HASARD UNE LETTRE DE CETTE PHRASE, LA PROBABILITE QUE CE SOIT <u>J</u> VAUT UN SUR QUATRE-VINGT-NEUF.

EN SOULIGNANT AU HASARD UNE LETTRE DE CETTE PHRASE, LA PROBABILITE QUE CE SOIT E VAUT QUINZE SUR QUATRE-VINGT-QUINZ<u>E</u>.

Essayez de compléter :

EN SOUL<u>I</u>GNANT AU HASARD CINQ LETTRES DE CETTE PHRASE, LA PR<u>O</u>B<u>A</u>BILITE QUE CE SOIE<u>N</u>T [I O A N A] V<u>A</u>UT

Faire les cinquième et sixième parties des exercices

7. Exercices

Première partie : exercices sur les définitions de base

Exercice 1

On lance un dé. Quelle est la probabilité que le résultat soit un nombre premier ?

Exercice 2

Une roue permet de tirer au hasard une lettre de l'alphabet. Quelle est la probabilité que le résultat soit une lettre du mot « ROUE » ?

Exercice 3

On tire au hasard une carte d'un jeu de 52. Quelle est la probabilité que cette carte

a) soit un cœur ?
b) soit un as ?
c) soit une habillée ? [carte habillée = Roi, Reine ou Valet]
d) soit rouge ?
e) soit une reine noire ?
f) ne soit pas un 10 ?

Exercice 4

Paradoxe de Simpson. Soit le tableau suivant :

École A	**Effectifs**	**Nombre de réussites**
Garçons	87	81
Filles	270	234
Totaux	357	315
École B	**Effectifs**	**Nombre de réussites**
Garçons	263	192
Filles	80	55
Totaux	343	247

a) Pour chaque école, calculer la probabilité de réussite

d'un garçon,
d'une fille,
d'un élève quelconque.

b) Même question pour l'ensemble formé par la réunion des deux écoles A et B.

Exercice 5

À bord d'un navire en détresse, on dénombre
195 hommes, dont 12 savent nager, et 45 femmes, dont 9 savent nager.

a) Considérons une personne prise au hasard sur ce bateau.
Quelle est la probabilité qu'elle sache nager ?
b) Considérons une femme prise au hasard sur ce bateau.
Quelle est la probabilité qu'elle ne sache pas nager ?

Exercice 6

La roulette est un jeu de casino. La roulette comporte 37 numéros : de 0 à 36. Il n'est possible de miser que sur ceux de 1 à 36. Quand le 0 sort, tous les jetons vont au casino.
Plutôt que de miser sur un seul numéro, il est possible par exemple de miser
> sur « pair », c-à-d l'ensemble des numéros pairs (0 étant exclu)
> sur « impair », c-à-d l'ensemble des numéros impairs
> sur « manque », c-à-d l'ensemble des numéros de 1 à 18
> sur « passe », c-à-d l'ensemble des numéros de 19 à 36
> sur « rouge », c-à-d l'ensemble des numéros 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36
> sur « noir », c-à-d l'ensemble des numéros 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35

Calculer la probabilité de chaque événement suivant :
A : le numéro gagnant est 13
B : le numéro gagnant est impair
C : le numéro gagnant est passe
D : le numéro gagnant est rouge et pair
E : le numéro gagnant est noir et manque
F : le numéro gagnant est rouge, impair et passe

Exercice 7

On lance une pièce de monnaie 3 fois.

a) Énumérer les éléments de l'univers Ω de cette expérience.
b) Énumérer les éléments de A : la pièce donne F au 2^{e} jet
et calculer Pr(A)
c) Énumérer les éléments de B : le 1er et le 3^{e} jets donnent le même résultat
et calculer Pr(B)
d) Énumérer les éléments de C : il y a au plus un P dans la séquence donnée par les 3 jets
et calculer Pr(C)
e) Énumérer les éléments de D : le 1er et le 2^{e} jets donnent un résultat différent
et calculer Pr(D)

Exercice 8

On tire un domino au hasard. Quelle est la probabilité que la somme des points sur ce domino fasse 4 ? Remarque : les dominos réalisent des combinaisons avec répétitions de 2 symboles choisis dans un ensemble de 7.

Exercice 9

Expérience : soit un ensemble de 3 garçons (Bob, Jim, Max) et 2 filles (Léa, Zoé). De cet ensemble de 5 personnes, on en tire au sort 2. L'ordre compte.

a) Former l'univers Ω_1 des listes de 2 personnes. Quelle est la taille de cet univers ? Dans cet univers, les résultats sont-ils équiprobables ?
b) Former l'univers Ω_2 des listes de 2 catégories de genres : G pour garçon et F pour fille. Quelle est la taille de cet univers ? Dans cet univers, les résultats sont-ils équiprobables ?

Deuxième partie : exercices sur les résultats équiprobables et le dénombrement

Exercice 10

On lance 4 pièces de monnaie. Trouver les probabilités des événements suivants :

A : Elles donnent les quatre « Face ».
B : Une seule pièce donne « Pile ».
C : Il y a autant de « Pile » que de « Face ».
D : Il y a au plus un « Pile ».
E : Il y a au moins un « Pile ».

Exercice 11

Une pièce de monnaie est lancée 5 fois. Quelle est la probabilité que « Face » apparaisse un nombre impair de fois ?

Exercice 12

On lance 2 dés. Trouver les probabilités des événements suivants :

A : La somme des points fait 2.
B : La somme des points fait 6.
C : La somme des points est différente de 11.
D : La différence des points vaut 2.
E : Le rapport des points vaut 2.
F : Les 2 dés donnent le même résultat.

Exercice 13

On lance un dé 3 fois. Calculer la probabilité que la séquence soit composée de 3 chiffres différents.

Exercice 14

Mallarmé écrivait : « Un coup de dés jamais n’abolira le hasard ».
Bienaimé croit que si un dé tombe 3 fois de suite sur 6 le diable apparaîtra.

a) Quelle est la probabilité que le 6 apparaisse 3 fois en 3 jets ?
b) Quelle est la probabilité que le 6 apparaisse au moins 3 fois de suite en 4 jets ?

Exercice 15

D’un jeu de 52 cartes, on tire une « main » de 5 cartes (l’ordre ne compte pas et il n’y a pas de remise). Calculer les probabilités des événements suivants :

A : Toutes les cartes sont des piques.
B : Toutes les cartes sont rouges.
C : Il y a 3 valets et 2 as.
D : Il y a exactement 2 trèfles.
E : Il y a un carré (4 as ou 4 rois ou 4 reines, etc.).
F : Il y a 4 carreaux et 1 cœur.
G : Il y a un full (1 brelan et 1 paire)
H : Il y a 2 paires.

Exercice 16

D’un jeu de 52 cartes, on fait 5 fois un tirage avec remise. À chaque tirage, on note sur une liste le nom de la carte qui apparaît. Calculer les probabilités des événements suivants :

A : La liste comporte 5 cartes identiques.
B : La liste ne comporte que des cartes différentes.
C : La liste comporte 5 cœurs.
D : La liste comporte 5 valets.
E : La liste comporte exactement 3 valets.
F : La liste comporte 3 rois et 2 reines.
G : La liste comporte 3 cœurs et 2 piques.
H : La liste commence par l’as de cœur.
I : La liste commence par un as.
J : La liste commence par 2 as.

Exercice 17

Un programme informatique mélange au hasard les lettres du mot ASSASSINS. Quelle est la probabilité que le résultat soit un « mot » commençant par A et finissant par S ?

Exercice 18

Monsieur Martin a 2 billets pour le concert d'un artiste qu'il déteste : « un chanteur, dit-il, qui abrutit les foules ». Il veut offrir ces billets à 2 élèves tirés au sort dans sa meilleure classe, qui comporte 14 garçons et 11 filles. Quelle est la probabilité que les bénéficiaires des billets soient de sexe opposé ?

Exercice 19

22 bébés blancs et 16 bébés noirs sont stockés dans le congélateur du *Restaurant des Joyeux Ogres*.
Le chef sort au hasard deux bébés de ce congélateur. L'ordre ne compte pas.
Calculer les probabilités des événements suivants :

E = « les deux bébés sont blancs »
F = « les deux bébés sont de couleurs différentes »
G = « les deux bébés sont de la même couleur »

Troisième partie : exercices sur les opérations ensemblistes et les formules 1 à 5

Exercice 20

On tire successivement trois cartes d'un jeu. Considérons les événements suivants :

E_1 : La 1^{re} carte est un roi.
E_2 : La 2^e carte est un roi.
E_3 : La 3^e carte est un roi.

Traduire en français les événements suivants :

$E_1 \cap E_2$
$E_1 \cap \neg E_2$
$E_1 \cup E_3$
$\neg E_1 \cap E_2 \cap E_3$
$E_2 \mid E_1$

Exercice 21

En utilisant la formule 2, calculer les probabilités demandées.

a) On lance une pièce de monnaie 10 fois.
Pr(au moins un F)

b) On lance un dé 4 fois.
Pr(au moins un 6)
Pr(au moins un résultat > 4)

c) On tire une main (5 cartes, l'ordre ne compte pas, il n'y a pas de remise) d'un jeu de 52 cartes.
Pr(au moins un cœur)
Pr(au moins une reine)

Exercice 22

En utilisant la formule 3, calculer les probabilités demandées.

a) On tire une carte d'un jeu de 52.
Pr(valet ou pique)
Pr(noire ou habillée)

b) Avec une roue, on tire au sort un nombre entier compris entre 1 et 100.
Pr(pair ou multiple de 3)
Pr(impair ou inférieur à 20)

Exercice 23

En utilisant les formules 2, 4 et 5, calculer les probabilités demandées.

a) D'une urne contenant 5 boules rouges et 15 noires, on en tire 2 au hasard sans remise. L'ordre compte.
Pr(1^{re} rouge, 2^{e} noire)
Pr(les 2 sont rouges)
Pr(les 2 sont noires)
Pr(les 2 sont de la même couleur)
Pr(les 2 ne sont pas de la même couleur)

b) D'un jeu de 52 cartes, on en tire 2 au hasard sans remise. L'ordre compte.
Pr(1^{re} valet noir, 2^{e} valet)
Pr(1^{re} valet de trèfle, 2^{e} trèfle)
Pr(les 2 sont de trèfle)
Pr(aucune des 2 n'est de trèfle)
Pr(au moins une des 2 n'est pas de trèfle)
Pr(les 2 sont de trèfle ou les 2 sont de pique)
Pr(les 2 sont noires)

Exercice 24

En 1654, le Chevalier de Méré posa le problème suivant à Blaise Pascal :
« Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double-six en lançant vingt-quatre fois deux dés ? »
Répondre.

Quatrième partie : exercices sur les résultats non équiprobables, les arbres et la loi binomiale

Exercice 25

Un couple a décidé d'avoir des enfants jusqu'à la naissance d'une fille. Mais il se fixe un maximum de 4 enfants (on supposera qu'aucun ne meurt). La probabilité de naissance d'une fille vaut 48.78 % et celle d'un garçon vaut 51.22 %. Représenter sur un arbre l'univers des possibilités envisagées par ce couple (« mots » de taille au plus 4, avec un alphabet à 2 lettres : G, F) et calculer la probabilité de chacune de ces possibilités.

Exercice 26

Deux personnes jouent à la roulette russe. Une cartouche est introduite dans un barillet à 6 coups. Le barillet est tourné au hasard avant chaque pression sur la détente. Quelle est la probabilité qu'une des personnes reçoive une balle dans la tête au plus tard au 4^e coup ?

Exercice 27

A et B veulent jouer 3 parties d'échecs. Quand ils jouent l'un contre l'autre, on estime que, pour chaque partie :

Pr(A gagne) = 1 / 2
Pr(B gagne) = 1 / 3
Pr(partie nulle) = 1 / 6

Calculer les probabilités des événements suivants :

E : A gagne les 3 parties.
F : 2 parties se terminent par un nul.
G : A et B gagnent alternativement.
H : B gagne au moins 1 partie.

Exercice 28

À chaque nuit de pleine Lune, Pascal a une probabilité de 0.8 de se transformer en loup-garou, puis de redevenir homme au lever du jour. Quand il est métamorphosé en loup-garou, Pascal mange 3 femmes durant la nuit ; mais s'il reste homme, il ne mange qu'une seule femme. En vous aidant d'un arbre, trouver :

a) la probabilité que Pascal mange exactement 5 femmes en 3 nuits de pleine Lune ;
b) la probabilité que Pascal mange au moins 7 femmes en 3 nuits de pleine Lune.

Exercice 29

Vous avez devant vous 10 boîtes. 4 sont piégées : leur ouverture déclenche l'explosion d'une bombe qui provoque une mort immédiate. Votre mission est d'ouvrir successivement 3 boîtes (si vous arrivez jusque là).

a) Dessiner l'arbre de cette mission, en indiquant sur chaque branche l'événement (explosion ou non) et la probabilité correspondante.
b) Quelle est la probabilité que cette mission vous fasse mourir ?

Exercice 30

Soient 2 urnes.
U_1 contient 2 boules noires et 1 blanche.
U_2 contient 1 boule noire et 3 blanches.
On tire d'abord une urne au sort.
Puis, de cette urne, on extrait au hasard, sans remise, 2 boules.

a) Dessiner l'arbre de cette expérience.
b) Quelle est la probabilité que la 2^e boule soit noire ?
c) Quelle est la probabilité que les 2 boules soient de la même couleur ?

Exercice 31

Une pièce de monnaie est lancée 8 fois.

a) Quelle est la probabilité que « Face » sorte 6 fois si la pièce est équilibrée (avec Pr(F) = 50 %) ?
b) Quelle est la probabilité que « Face » sorte 6 fois si la pièce est truquée (avec Pr(F) = 60 %) ?

[*loi binomiale*]

Exercice 32

D’une urne contenant 13 boules noires et 27 boules rouges, on en tire 9 fois une, avec remise. On note chaque fois le résultat N ou R sur une liste. L’ordre compte.

a) Quelle est la probabilité que R soit présent 6 fois sur la liste ?
b) Quelle est la probabilité que R soit présent au moins 6 fois sur la liste ?

[*loi binomiale*]

Exercice 33

Dans une ville, deux candidats A et B se présentent pour le poste de procureur général. Un sondage permet d’estimer que 57 % des électeurs vont voter pour A et 43 % vont voter pour B. On tire au hasard 10 électeurs. Quelle est la probabilité que 5 d’entre eux vont voter pour A ?

[*loi binomiale*]

Exercice 34

Quelle est la probabilité d’obtenir 2 fois un total de 9 points en lançant 6 fois une paire de dés ?

[*loi binomiale*]

Cinquième partie : exercices sur les probabilités conditionnelles et la dépendance

Exercice 35

On considère 2 événements A et B tels que
$Pr(A) = 1 / 2$
$Pr(B) = 1 / 3$
$Pr(A \cap B) = 1 / 4$
Calculer $Pr(A|B)$ et $Pr(B|A)$.
A et B sont-ils dépendants ou indépendants ?

Exercice 36

Dans une élection où 3 candidats sont en concurrence, A a une probabilité de 50 % d’être élu, B une probabilité de 30 % et C une probabilité de 20 %. Nous apprenons que C n’a pas été élu, mais nous ne savons pas encore qui, de A ou de B, est le vainqueur. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 37

On choisit au hasard une famille parmi celles qui ont 2 enfants.

a) Quelle est la probabilité que les enfants soient 2 garçons si on sait que l'aîné est un garçon ?
b) Quelle est la probabilité que les enfants soient 2 garçons si on sait qu'au moins un des 2 enfants est un garçon ?

[Pour simplifier, on supposera que Pr(un enfant est un garçon) = 50 %, ce qui n'est pas tout à fait exact]

Exercice 38

On lance une pièce de monnaie 2 fois. Considérons les événements :

A : La pièce tombe 2 fois du même côté.
B : La pièce donne au plus 1 fois « Face ».

A et B sont-ils dépendants ou indépendants ?

Exercice 39

On lance une pièce de monnaie 3 fois. Considérons les événements :

A : Le 1er jet donne « Face ».
B : Le 2^{e} jet donne « Face ».
C : 2 jets consécutifs donnent « Face ».

Vérifier que :

a) A et B sont indépendants.
b) A et C sont indépendants.
c) B et C sont dépendants.

Exercice 40

On tire au hasard 2 cartes d'un jeu de 52. L'ordre compte et il n'y a pas de remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 as sous la condition qu'une des 2 cartes est l'as de pique ?

Exercice 41

Une maladie touche, dans la population genevoise, trois personnes sur mille. Cette maladie est toujours mortelle, mais on peut sauver le patient grâce à une opération passablement risquée. Cette opération sauve une personne malade sur deux, mais tue la moitié des personnes opérées. Avant de décider l'opération, on peut utiliser un test de dépistage qui permet de détecter la maladie. Avec ce test, 96 % des malades obtiennent un résultat « positif » (c'est-à-dire, le test dit : « vous êtes malade »), mais 6 % des personnes saines obtiennent aussi un résultat « positif » (on dit que ce sont des « faux positifs »). Une personne choisie au hasard passe le test. Ce test donne un résultat positif. Conseillez-vous à la personne de se faire opérer ? Pour vous aider à répondre, calculer la probabilité que cette personne ne soit pas malade sachant que son test a donné un résultat positif.

Exercice 42

Les deux machines à sous d'une salle de jeux permettent normalement de gagner avec une probabilité de 20 %. Mais l'une est détraquée et permet de gagner avec une probabilité de 60 %. Vous ne savez pas quelle machine est détraquée. Vous en choisissez une au hasard et vous jouez. Calculez votre probabilité de jouer sur la machine détraquée

a) avant que vous ne commenciez à jouer ;
b) si vous jouez une partie et si vous la gagnez ;
c) si vous jouez une partie et si vous la perdez ;
d) si vous jouez deux parties et si vous les gagnez toutes les deux ;
e) si vous jouez deux parties et si vous les perdez toutes les deux ;
f) si vous jouez deux parties et si vous gagnez la 1^{re} et perdez la 2^{e} ;
g) si vous jouez deux parties et si vous perdez la 1^{re} et gagnez la 2^{e} .

Exercice 43

À Genève, la probabilité qu'un adulte mâle choisi au hasard soit un étranger est d'environ 45 %. Intéressons-nous à une certaine catégorie de délit, que nous désignerons par la lettre X, et qui ne peut être commis que par un adulte mâle. La probabilité qu'un adulte mâle étranger commette un délit X vaut 2 % et la probabilité qu'un adulte mâle suisse commette un délit X vaut 0.3 %. Si un délit X est commis par une seule personne, quelle est la probabilité que son auteur soit un étranger ?

Sixième partie : exercices variés

Exercice 44

Dans un groupe de 23 personnes choisies au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins deux aient leur anniversaire à la même date ? (Pour simplifier, on décide d'ignorer les années bissextiles).

Exercice 45

5 couples hétérosexuels mariés se livrent à un jeu érotique. Un homme et une femme sont choisis au hasard. Ils doivent alors s'embrasser. Quelle est la probabilité que le hasard désigne un homme et une femme qui ne sont pas mariés ensemble ?

Exercice 46

Dans l'opéra d'Offenbach « Les contes d'Hoffmann », Coppélius vend des yeux :
des bleus et des noirs.
Supposons qu'il ait dans son sac 12 yeux bleus et 8 yeux noirs.
S'il sort 2 yeux au hasard, quelle est la probabilité :

a) qu'ils soient noirs tous les deux ?
b) qu'ils soient de couleurs différentes ?

Exercice 47

Le monstre du Léman est une créature aquatique qui se nourrit d'humains.
Une étude a permis d'estimer à 5 % la probabilité qu'une personne se baignant 10 minutes à la plage des Eaux-Vives soit dévorée par le monstre.
Le 15 septembre, Alice prévoit trois baignades de 10 minutes à la plage des Eaux-Vives.

a) Dessiner l'arbre de probabilités correspondant à ce projet de 3 baignades.
b) Trouver la probabilité qu'Alice soit dévorée par le monstre.
c) Montrer sur l'arbre le ou les chemins correspondant à l'événement suivant :
« Alice est dévorée à la 2^e baignade ».

Exercice 48

On propose à Claude de lancer 3 pièces de monnaie. Une est de 1 Franc, une est de 2 Francs et une est de 5 Francs. Il pourra conserver les pièces qui présentent le côté « Pile ». Quelle est sa probabilité de gagner plus de 2 Francs ?

Exercice 49

On tire au hasard 2 chiffres différents compris entre 1 et 9. L'ordre compte. Sachant que la somme des chiffres est paire, quelle est la probabilité que les 2 chiffres soient impairs ?

Exercice 50

Problème des dérangements (voir le dernier exercice d'analyse combinatoire).
4 messieurs laissent leur chapeau au vestiaire. En fin de soirée, ces 4 messieurs sont les les derniers à partir. Comme ils sont très saouls, chacun reprend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucun ne reprenne son propre chapeau ?

Exercice 51

L'hémophilie A est provoquée par la mutation d'un gène du chromosome X. Un homme qui porte cette mutation est toujours hémophile. Par contre, l'hémophilie A est très rare chez une femme, parce que ce gène est récessif. Pour qu'une femme soit atteinte de cette maladie, il faut que ses deux chromosomes X portent la mutation. Cependant, une femme non malade peut porter le gène de l'hémophilie A et le transmettre à ses descendants. Notons X_h un chromosome X porteur du gène de l'hémophilie A. Considérons le cas de Sacha, un homme sain. Ses chromosomes sexuels sont XY. Sa femme Irina est non malade, mais porteuse du gène de l'hémophilie A. Ses chromosomes sexuels sont XX_h. Chaque enfant mâle de ce couple recevra la chromosome Y de son père et l'un des chromosomes X ou X_h de sa mère. La probabilité qu'il soit hémophile est donc de 50 %. Le couple désire 3 enfants. Sans tenir compte de la possibilité d'avoir de vrais jumeaux, quelle est la probabilité qu'au moins un des 3 enfants soit un garçon hémophile ?

[On prendra : Pr(naissance d'un garçon) = Pr(naissance d'une fille) = 50 %]

Exercice 52

Une urne est remplie d'un grand nombre de jetons, dont 2 / 3 sont d'une certaine couleur et 1 / 3 d'une autre couleur. Vous tirez au hasard n fois un jeton, avec remise, et vous notez la séquence des couleurs.
Expérience 1 : n = 5
et vous obtenez 4 fois « rouge » et 1 fois « blanc » (pas nécessairement dans cet ordre)
Expérience 2 : n = 20
et vous obtenez 12 fois « rouge » et 8 fois « blanc » (pas nécessairement dans cet ordre)
Vous ne savez pas si l'urne contient
2 / 3 de boules rouges et 1 / 3 de boules blanches (hypothèse A)
ou si l'urne contient
2 / 3 de boules blanches et 1 / 3 de boules rouges (hypothèse B)

a) Laquelle des 2 expériences vous paraît-elle la plus favorable à l'hypothèse A ?
b) Calculer la probabilité $p1_A$ du résultat de l'expérience 1 en partant de l'hypothèse A.
c) Calculer la probabilité $p1_B$ du résultat de l'expérience 1 en partant de l'hypothèse B.
d) Calculer la probabilité $p2_A$ du résultat de l'expérience 2 en partant de l'hypothèse A.
e) Calculer la probabilité $p2_B$ du résultat de l'expérience 2 en partant de l'hypothèse B.
f) Quel rapport est-il le plus grand $p1_A / p1_B$ ou $p2_A / p2_B$?
g) Moralité ?

Exercice 53

Un problème de Tversky et Kahneman. « Un taxi a été impliqué dans un accident de nuit avec délit de fuite. Deux sociétés de taxis travaillent dans la ville, les Verts et les Bleus.
Vous disposez des informations suivantes :
85 % des taxis de la ville sont verts et 15 % bleus.
Un témoin a identifié le taxi comme étant bleu. La cour a vérifié la fiabilité du témoin dans des circonstances reproduisant celles de la nuit de l'accident et a conclu que le témoin avait identifié correctement chacune des deux couleurs à 80 %.
Quelle est la probabilité que le taxi impliqué dans l'accident soit bleu plutôt que vert ? »

Exercice 54

Problème de l'induction.
Un savant pose une hypothèse H.
Il conçoit une expérience destinée à vérifier H.
Soit l'événement A : L'expérience est un succès.
Cette expérience est telle que si H est vraie, la probabilité de A vaut 1. Autrement dit :
$Pr(A|H) = 1$
Mais si H est fausse, il se peut que A se réalise tout de même, avec une probabilité q.
Autrement dit :
$Pr(A|\neg H) = q$

Supposons que l'expérience ait lieu n fois
et notons B_n : L'expérience est chaque fois un succès.
Nous avons :
$Pr(B_n|H) = 1$ et $Pr(B_n|\neg H) = q^n$

La formule de Bayes donne alors :

$$Pr(H \mid B_n) = \frac{Pr(H)}{Pr(H) + q^n \cdot (1 - Pr(H))}$$

Calculer cette probabilité pour n = 10 si on estime que Pr(H) = 51 % et q = 10 %.

Solutions

1. 3 / 6

2. 4 / 26

3. a) 13 / 52
b) 4 / 52
c) 12 / 52
d) 26 / 52
e) 2 / 52
f) 48 / 52

4.

a)	A :	93.10 %	86.67 %	88.24 %
	B :	73.00 %	68.75 %	72.01 %
b)	A union B :	78.00 %	82.57 %	80.29 %

Observations : Dans les écoles A et B, les garçons réussissent mieux que les filles. Mais si on réunit les deux écoles, on constate que les filles réussissent mieux que les garçons.

5. a) 8.75 % b) 80 %

6. Pr(A) = 1 / 37
Pr(B) = 18 / 37
Pr(C) = 18 / 37
Pr(D) = 8 / 37
Pr(E) = 9 / 37
Pr(F) = 5 / 37

7.

a) Ω = {PPP ; PPF ; PFP ; PFF ; FPP ; FPF ; FFP ; FFF}
b) A = {PFP ; PFF ; FFP ; FFF} Pr(A) = 4 / 8
c) B = {PPP ; PFP ; FPF; FFF} Pr(B) = 4 / 8
d) C = {PFF ; FPF ; FFP ; FFF} Pr(C) = 4 / 8
e) D = {PFP ; PFF ; FPP ; FPF} Pr(D) = 4 / 8

8. Il y a $\overline{C_2^7}=28$ dominos. 3 ont une somme de 4 (0 + 4, 1 + 3, 2 + 2).
La probabilité cherchée est donc 3 / 28

9. a) Ω_1 = {BJ ; BM ; BL ; BZ ; JB ; JM ; JL ; JZ ; MB ; MJ ; ML ; MZ ;
LB ; LJ ; LM ; LZ ; ZB ; ZJ ; ZM ; ZL}
$t(\Omega_1) = 20$ résultats équiprobables
b) Ω_2 = {GG ; GF ; FG ; FF}
$t(\Omega_2) = 4$ résultats non équiprobables

10. $Pr(A)=\dfrac{C_4^4}{\overline{A}_4^2}=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$

$Pr(B)=\dfrac{C_1^4}{\overline{A}_4^2}=\dfrac{4}{16}$

$Pr(C)=\dfrac{C_2^4}{\overline{A}_4^2}=\dfrac{6}{16}$

$Pr(D)=\dfrac{C_4^4+C_1^4}{\overline{A}_4^2}=\dfrac{5}{16}$

$Pr(E)=\dfrac{\overline{A}_4^2-C_0^4}{\overline{A}_4^2}=\dfrac{15}{16}$

11. $\dfrac{C_1^5+C_3^5+C_5^5}{\overline{A}_5^2}=\dfrac{16}{32}$

12. $t(\Omega)=\overline{A}_2^6=6^2=36$

Pr(A) = 1 / 36
Pr(B) = 5 / 36
Pr(C) = 34 / 36
Pr(D) = 8 / 36
Pr(E) = 6 / 36
Pr(F) = 6 / 36

13. $\dfrac{A_3^6}{\overline{A}_3^6}=\dfrac{120}{6^3}=\dfrac{120}{216}$

14. a) $\dfrac{1}{\overline{A}_3^6}=\dfrac{1}{6^3}=\dfrac{1}{216}$

b) $\dfrac{10+1}{6^4}=\dfrac{11}{1'296}$

15. $Pr(A)=\dfrac{C_5^{13}}{C_5^{52}}=0.0495\,\%$ $Pr(B)=\dfrac{C_5^{26}}{C_5^{52}}=2.53\,\%$

$Pr(C)=\dfrac{C_3^4\cdot C_2^4}{C_5^{52}}=0.000923\,\%$ $Pr(D)=\dfrac{C_2^{13}\cdot C_3^{39}}{C_5^{52}}=27.43\,\%$

$Pr(E)=\dfrac{C_1^{13}\cdot C_1^{48}}{C_5^{52}}=0.024\,\%$ $Pr(F)=\dfrac{C_4^{13}\cdot C_1^{13}}{C_5^{52}}=0.358\,\%$

$Pr(G)=\dfrac{C_1^{13}\cdot C_3^4\cdot C_1^{12}\cdot C_2^4}{C_5^{52}}=0.144\,\%$ $Pr(H)=\dfrac{C_2^{13}\cdot C_2^4\cdot C_2^4\cdot C_1^{44}}{C_5^{52}}=4.75\,\%$

16. $Pr(A)=\frac{C_1^{52}}{\overline{A_5^{52}}}=\frac{52}{52^5}=0.000014\,\%$

$Pr(B)=\frac{A_5^{52}}{\overline{A_5^{52}}}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{52^5}=82.03\%$

$Pr(C)=\frac{\overline{A_5^{13}}}{\overline{A_5^{52}}}=\frac{13^5}{52^5}=0.098\,\%$

$Pr(D)=\frac{\overline{A_5^{4}}}{\overline{A_5^{52}}}=\frac{4^5}{52^5}=0.00027\%$

$Pr(E)=\frac{C_3^5\cdot\overline{A_3^4}\cdot\overline{A_2^{48}}}{\overline{A_5^{52}}}=\frac{10\cdot 4^3\cdot 48^2}{52^5}=0.388\,\%$

$Pr(F)=\frac{C_3^5\cdot\overline{A_3^4}\cdot\overline{A_2^{4}}}{\overline{A_5^{52}}}=\frac{10\cdot 4^3\cdot 4^2}{52^5}=0.0027\,\%$

$Pr(G)=\frac{C_3^5\cdot\overline{A_3^{13}}\cdot\overline{A_2^{13}}}{\overline{A_5^{52}}}=\frac{10\cdot 13^3\cdot 13^2}{52^5}=0.977\,\%$

$Pr(H)=\frac{C_1^1\cdot\overline{A_4^{52}}}{\overline{A_5^{52}}}=\frac{52^4}{52^5}=1.92\,\%$

$Pr(I)=\frac{C_1^4\cdot\overline{A_4^{52}}}{\overline{A_5^{52}}}=\frac{4\cdot 52^4}{52^5}=7.69\,\%$

$Pr(J)=\frac{\overline{A_2^4}\cdot\overline{A_3^{52}}}{\overline{A_5^{52}}}=\frac{4^2\cdot 52^3}{52^5}=0.592\,\%$

17. Le mot comporte 9 lettres, dont 2 A et 5 S. La probabilité demandée vaut :

$\frac{7!/4!}{9!/(2!\cdot 5!)}=\frac{210}{1'512}=13.89\,\%$

18. $\frac{C_1^{14}\cdot C_1^{11}}{C_2^{25}}=\frac{154}{300}=51.33\%$

19. $Pr(E)=\frac{C_2^{22}}{C_2^{38}}=\frac{231}{703}$

$Pr(F)=\frac{C_1^{22}\cdot C_1^{16}}{C_2^{38}}=\frac{352}{703}$

$Pr(G)=\frac{C_2^{22}+C_2^{16}}{C_2^{38}}=\frac{351}{703}$ ou $Pr(G)=\frac{C_2^{38}-C_1^{22}\cdot C_1^{16}}{C_2^{38}}=\frac{351}{703}$

20.

$E_1 \cap E_2$	Les 2 premières cartes sont des rois.
$E_1 \cap \neg E_2$	La 1re carte est un roi, mais non la 2e.
$E_1 \cup E_3$	L'une au moins de la 1re et de la 3e cartes est un roi.
$\neg E_1 \cap E_2 \cap E_3$	Les 2 dernières cartes sont des rois, mais pas la 1re.
$E_2 \mid E_1$	La 2e carte est un roi sous la condition que la 1re soit un roi.

21.

a) Pr(au moins un F) = $1-\frac{1}{2^{10}}=99.90\%$

b) Pr(au moins un 6) = $1-\frac{5^4}{6^4}=51.77\%$

Pr(au moins un résultat > 4) = $1-\frac{4^4}{6^4}=80.25\%$

c) Pr(au moins un cœur) = $1-\frac{C_5^{39}}{C_5^{52}}=77.85\%$

Pr(au moins une reine) = $1-\frac{C_5^{48}}{C_5^{52}}=34.12\%$

22.

a) Pr(valet ou pique) = $\frac{4}{52}+\frac{13}{52}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}$

Pr(noire ou habillée) = $\frac{26}{52}+\frac{12}{52}-\frac{6}{52}=\frac{32}{52}$

b) Pr(pair ou multiple de 3) = $\frac{50}{100}+\frac{33}{100}-\frac{16}{100}=\frac{67}{100}$

Pr(impair ou inférieur à 20) = $\frac{50}{100}+\frac{19}{100}-\frac{20}{100}=\frac{49}{100}$

23.

a) Pr(RN) = $\frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}=0.1974$

Pr(RR) = $\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}=0.0526$

Pr(NN) = $\frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}=0.5526$

Pr(RR ou NN) = 0.0526 + 0.5526 = 0.6053

Pr(RN ou NR) = 1 − 0.6053 = 0.3947

b) Pr(1re valet noir, 2e valet) = $\frac{2}{52} \cdot \frac{3}{51} = 0.00226$

Pr(1re valet de trèfle, 2e trèfle) = $\frac{1}{52} \cdot \frac{12}{51} = 0.00452$

Pr(les 2 sont de trèfle) = $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = 0.0588$

Pr(aucune des 2 n'est de trèfle) = $\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} = 0.5588$

Pr(au moins une des 2 n'est pas de trèfle) = 1 − 0.0588 = 0.9412

Pr(les 2 sont de trèfle ou les 2 sont de pique) = $2 \cdot 0.0588 = 0.1176$

Pr(les 2 sont noires) = $\frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} = 0.2451$

24.

Pr(au moins un six en 4 lancers d'un dé)

= 1 − Pr(pas de six) = $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177$

Pr(au moins un double-six en 24 lancers de 2 dés)

= 1 − Pr(pas de double-six) = $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914$

25.

$$Pr(F) = 48.78\%$$
$$Pr(GF) = 0.5122 \cdot 0.4878 = 24.99\%$$
$$Pr(GGF) = 0.5122^2 \cdot 0.4878 = 12.80\%$$
$$Pr(GGGF) = 0.5122^3 \cdot 0.4878 = 6.55\%$$
$$Pr(GGGG) = 0.5122^4 = 6.88\%$$

26.

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = 51.77\%$$

27.

Pr(E) = Pr(AAA) = $(\frac{1}{2})^3 = 12.5\%$

Pr(F) = Pr(ANN ou NAN ou NNA ou BNN ou NBN ou NNB)

= $3\cdot(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{6})^2 + 3\cdot(\frac{1}{3})\cdot(\frac{1}{6})^2 = 6.94\%$

Pr(G) = Pr(ABA ou BAB) = $(\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})^2\cdot(\frac{1}{2}) = 13.89\%$

Soit X = A ou N

Pr(H) = 1 − Pr(XXX) = $1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{6})^3 = 70.37\%$

28.

a) Pr([3F ; 1F ; 1F] ou [1F ; 3F ; 1F] ou [1F ; 1F ; 3F]) = $3\cdot 0.8\cdot 0.2^2 = 0.096$

b) Pr([3F ; 3F ; 1F] ou [3F ; 1F ; 3F] ou [1F ; 3F ; 3F] ou [3F ; 3F ; 3F]) = $3\cdot 0.8^2\cdot 0.2 + 0.8^3 = 0.896$

29.

a) ....

b) $\frac{4}{10} + \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} = 83.33\%$

30.

a) ....

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = 45.83\%$

c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = 41.67\%$

31. a) $C_6^8\cdot 0.5^6\cdot 0.5^2 = 10.94\%$

b) $C_6^8\cdot 0.6^6\cdot 0.4^2 = 20.90\%$

32. a) $C_6^9\cdot(\frac{27}{40})^6\cdot(\frac{13}{40})^3 = 27.27\%$

b) $C_6^9\cdot(\frac{27}{40})^6\cdot(\frac{13}{40})^3 + C_7^9\cdot(\frac{27}{40})^7\cdot(\frac{13}{40})^2 + C_8^9\cdot(\frac{27}{40})^8\cdot(\frac{13}{40})^1 + (\frac{27}{40})^9 = 67.07\%$

33. $C_5^{10}\cdot 0.57^5\cdot 0.43^5 = 22.29\%$

34. $C_2^6\cdot(\frac{4}{36})^2\cdot(\frac{32}{36})^4 = 11.56\%$

35. Pr(A|B) = (1 / 4) / (1 / 3) = 3 / 4 ≠ Pr(A)
Pr(B|A) = (1 / 4) / (1 / 2) = 1 / 2 ≠ Pr(B)
A et B sont dépendants

36. $$Pr(A|\neg C)=\frac{Pr(A\cap\neg C)}{Pr(\neg C)}=\frac{Pr(A)}{Pr(\neg C)}=\frac{0.5}{0.8}=62.5\%$$

37. Ω = {GG ; GF ; FG ; FF}
a) Pr(GG | GG ou GF) = Pr(GG) / Pr (GG ou GF) = (1 / 4) / (2 / 4) = 1 / 2
b) Pr(GG | GG ou GF ou FG) = Pr(GG) / Pr(GG ou GF ou FG) = (1 / 4) / (3 / 4) = 1 / 3

38.

Pr(A) = 2 / 4
Pr(B) = 3 / 4
Pr(A ∩ B) = 1 / 4 A et B dépendants

39.

Pr(A) = 1 / 2
Pr(B) = 1 / 2
Pr(C) = 1 / 2

a) Pr(A ∩ B) = 1 / 4 = Pr(A)Pr(B)
b) Pr(A ∩ C) = 1 / 4 = Pr(A)Pr(C)
c) Pr(B ∩ C) = 1 / 2 ≠ Pr(B)Pr(C)

40.

Pr(2 as | 1 des 2 cartes est as_P)
= Pr([as_P ; as] ou [as ; as_P]) / Pr([as_P ; non as_P] ou [non as_P ; as_P])

$$\frac{\frac{1}{52}\cdot\frac{3}{51}+\frac{3}{52}\cdot\frac{1}{51}}{\frac{1}{52}+\frac{1}{52}}=\frac{3}{51}$$

41. A : La personne est malade. B : Le test est positif.

$$Pr(\neg A|B)=\frac{Pr(\neg A)\cdot Pr(B|\neg A)}{Pr(\neg A)\cdot Pr(B|\neg A)+Pr(A)\cdot Pr(B|A)}=\frac{0.997\cdot 0.06}{0.997\cdot 0.06+0.003\cdot 0.96}=95.41\,\%$$

42. A : Vous jouez sur la machine détraquée

a) Pr(A) = 0.5

b) Pr(A | gain) =

$$\frac{Pr(A)\cdot Pr(gain|A)}{Pr(A)\cdot Pr(gain|A)+Pr(\neg A)\cdot Pr(gain|\neg A)}=\frac{0.5\cdot 0.6}{0.5\cdot 0.6+0.5\cdot 0.2}=0.75$$

c) Pr(A | perte) =

$$\frac{Pr(A)\cdot Pr(perte|A)}{Pr(A)\cdot Pr(perte|A)+Pr(\neg A)\cdot Pr(perte|\neg A)}=\frac{0.5\cdot 0.4}{0.5\cdot 0.4+0.5\cdot 0.8}=0.33$$

d) Pr(A | 2 gains) =

$$\frac{Pr(A)\cdot Pr(2\,gains|A)}{Pr(A)\cdot Pr(2\,gains|A)+Pr(\neg A)\cdot Pr(2\,gains|\neg A)}=\frac{0.5\cdot 0.6^2}{0.5\cdot 0.6^2+0.5\cdot 0.2^2}=0.90$$

e) Pr(A | 2 pertes) =

$$\frac{Pr(A)\cdot Pr(2\,pertes|A)}{Pr(A)\cdot Pr(2\,pertes|A)+Pr(\neg A)\cdot Pr(2\,pertes|\neg A)}=\frac{0.5\cdot 0.4^2}{0.5\cdot 0.4^2+0.5\cdot 0.8^2}=0.20$$

f) Pr(A | [gain ; perte]) =

$$\frac{Pr(A)\cdot Pr([gain\,;\,perte]|A)}{Pr(A)\cdot Pr([gain\,;\,perte]|A)+Pr(\neg A)\cdot Pr([gain\,;\,perte]|\neg A)}=\frac{0.5\cdot 0.6\cdot 0.4}{0.5\cdot 0.6\cdot 0.4+0.5\cdot 0.2\cdot 0.8}=0.60$$

g) Même réponse qu'en f)

43.

A : Le suspect est étranger.
B : Le suspect a commis le délit X.

Pr(A) = 0.45
Pr(¬A) = 0.55
Pr(B|A) = 0.02
Pr(B|¬A) = 0.003

$$Pr(A|B)=\frac{0.45\cdot 0.02}{0.45\cdot 0.02+0.55\cdot 0.003}=84.51\,\%$$

44. $1-\frac{A_{23}^{365}}{A_{23}^{365}}=50.73\%$

45. $\frac{5\cdot 4}{5\cdot 5}=80\,\%$

46. a) $\frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}=14.74\%$

b) $\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{19}+\frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}=50.53\%$

47.

a) ....

b) $Pr(1)+Pr(01)+Pr(001)=0.05+0.95\cdot 0.05+0.95^2\cdot 0.05=14.26\%$

c) ....

48.

1	2	F
1	F	5
F	2	5
F	F	5

La probabilité demandée vaut 4 / 8 = 50 %

49.

[pair ; pair] $A_2^4=12$
[impair ; impair] $A_2^5=20$

La probabilité demandée vaut 20 / (20 + 12) = 62.5 %

50.

La probabilité demandée vaut d(4) / P_4 = 9 / 4! = 37.5 %

51.

Pr(au moins un garçon hémophile) = 1 − Pr(pas de garçon hémophile)
Soit G_s un garçon « sain », c'est-à-dire non hémophile.
La probabilité de naissance de G_s vaut 0.25.
Les différents résultats pour les naissances de 3 enfants, sans garçon hémophile, sont les suivants :

FFF	$0.5^3=0.125$
G_sFF ou FG_sF ou FFG_s	$3\cdot 0.25\cdot 0.5^2=0.1875$
G_sG_sF ou G_sFG_s ou FG_sG_s	$3\cdot 0.5\cdot 0.25^2=0.09375$
$G_sG_sG_s$	$0.25^3=0.015625$

La somme donne 0.421875
La probabilité demandée vaut 1 − 0.421875 = 0.578125

52.

a) ....

b) $p1_A = C_1^5 \cdot (\frac{1}{3})^1 \cdot (\frac{2}{3})^4 = 32.92\%$

c) $p1_B = C_1^5 \cdot (\frac{2}{3})^1 \cdot (\frac{1}{3})^4 = 4.12\%$

d) $p2_A = C_8^{20} \cdot (\frac{1}{3})^8 \cdot (\frac{2}{3})^{12} = 14.80\%$

e) $p2_B = C_8^{20} \cdot (\frac{2}{3})^8 \cdot (\frac{1}{3})^{12} = 0.92\%$

f) $p1_A$ / $p1_B$ = 8 $p2_A$ / $p2_B$ = 16

g) Le résultat de l'expérience 2 est plus favorable à l'hypothèse A que celui de l'expérience 1.

53.

A : Le taxi est bleu.
¬A : Le taxi est vert.
B : Le témoin a vu que le taxi était bleu.

Pr(A) = 0.15
Pr(¬A) = 0.85
Pr(B|A) = 0.8
Pr(B|¬A) =0.2

$$Pr(A|B) = \frac{0.15 \cdot 0.8}{0.15 \cdot 0.8 + 0.85 \cdot 0.2} = 41.34\%$$

54.

$$\frac{0.51}{0.51 + 0.1^{10} \cdot 0.49} = 0.999999999996$$ ...étonnant, non ?