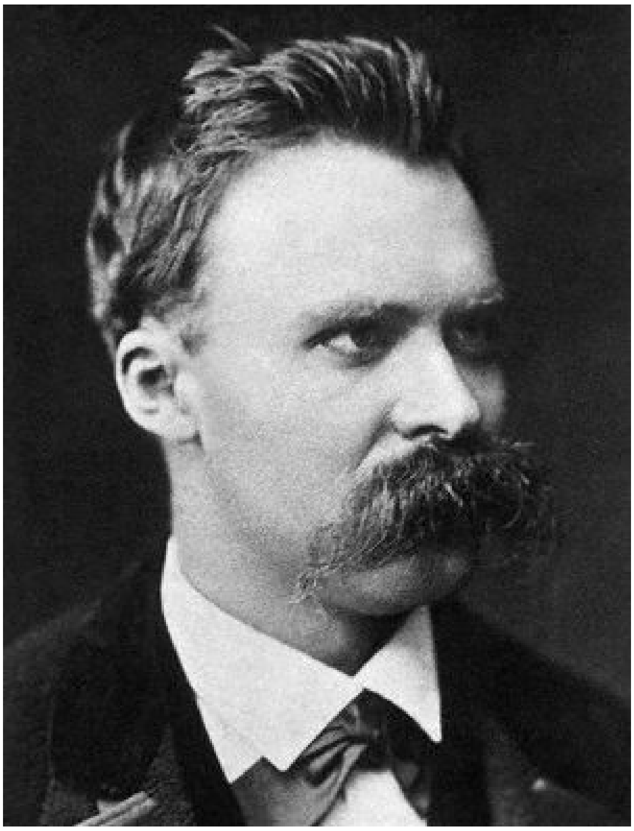
Des puissances aux logarithmes

1. Extension du domaine de la puissance

 **y**	 $\mathbf{x^n - a}$
La volonté de puissance	**L'enracinement**
	

D'abord il y eut a^p , avec p entier > 0

$a^1=a$ $a^2=aa$ $a^3=aaa$ $a^4=aaaa$ etc.

La propriété $a^p a^q=a^{p+q}$, en prenant $q=0$, donne $a^p a^0=a^p$, ce qui conduit à définir :

$a^0=1$ (si $a\neq 0$)

La propriété $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$, en prenant $p=0$, donne $\frac{a^0}{a^q}=a^{-q}$, ce qui conduit à définir :

$a^{-q}=\frac{1}{a^q}$ (si $a\neq 0$) En particulier :

$a^{-1}=\frac{1}{a}$ $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$ $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$ etc.

De la sorte, les puissances à exposants négatifs virent le jour.

La propriété $(a^m)^n=a^{mn}$, en prenant $m=\frac{p}{q}$ et $n=q$, donne $(a^{\frac{p}{q}})^q=a^{\frac{p}{q}q}$, c-à-d $(a^{\frac{p}{q}})^q=a^p$, ce qui conduit à définir :

$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ (si $a>0$) En particulier :

$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$ $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$ $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$ $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$ etc.

Et c'est ainsi que les exposants purent devenir fractions.

Une opération plus délicate (passage à la limite) permet d'aller encore plus loin et d'étendre les exposants à tous les nombres réels.

Voici une liste des principales définitions et propriétés des puissances :

Soient p et q des entiers strictement positifs ; r et s des nombres réels.

$a^0=1$	$a^1=a$	$a^p=aa...a$ (a écrit p fois)		$a^{-q}=\frac{1}{a^q}$	
$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=(\sqrt[q]{a})^p$		$a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}$	$a^{-\frac{1}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a}}$		
$a^{r+s}=a^r a^s$	$a^{r-s}=\frac{a^r}{a^s}$	$a^{rs}=(a^r)^s$	$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$	$(ab)^r=a^r b^r$	$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$

Certaines de ces propriétés nécessitent des restrictions sur a ou sur b (il faut parfois exclure 0 ou les valeurs négatives).

Exemples 1 Calculs

$4^2=16$ $\quad 4^3=64$ $\quad (-4)^2=16$ $\quad (-4)^3=-64$

$2^{-1}=\frac{1}{2}=0.5$ $\quad 5^{-2}=\frac{1}{25}=0.04$ $\quad 2^{-3}=\frac{1}{8}=0.125$ $\quad 10^{-4}=\frac{1}{10000}=0.0001$

$16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4$ $\quad 125^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{125}=5$ $\quad 64^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{64})^2=4^2=16$

$25^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}=0.2$ $\quad 32^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{32^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{(\sqrt[5]{32})^4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}=0.0625$

Exemples 2 Simplifications

$\frac{a^3a^5}{a^{10}}=\frac{a^8}{a^{10}}=a^{-2}$ $\quad (x^3)^{10}x^{-5}=x^{30}x^{-5}=x^{25}$ $\quad \frac{y^3}{\sqrt[5]{y^2}}=\frac{y^3}{y^{\frac{2}{5}}}=y^{3-\frac{2}{5}}=y^{\frac{15-2}{5}}=y^{\frac{13}{5}}=y^{2.6}$

Exercice 1 Calculer sans machine

$10^5=$ $\quad (-2)^4=$ $\quad (-2)^5=$ $\quad (-1)^{517}=$

$1^{517}=$ $\quad (-1)^{864}=$ $\quad 1^0=$ $\quad 0^1=$

$10^{-2}=$ $\quad (-1)^{(-17)}=$ $\quad 2^{-2}=$ $\quad 5^{-1}=$

$(-3)^{-2}=$ $\quad 10^{-3}=$ $\quad (-10)^{-1}=$ $\quad 81^{\frac{1}{2}}=$

$81^{\frac{1}{4}}=$ $\quad 64^{\frac{1}{2}}=$ $\quad 64^{\frac{1}{3}}=$ $\quad 1000^{\frac{2}{3}}=$

$4^{\frac{3}{2}}=$ $\quad 81^{\frac{3}{4}}=$ $\quad 10000^{-\frac{1}{2}}=$ $\quad 9^{-\frac{1}{2}}=$

$8^{-\frac{1}{3}}=$ $\quad 64^{-\frac{5}{6}}=$ $\quad 1000^{-\frac{5}{3}}=$ $\quad 0.01^{-\frac{3}{2}}=$

Exercice 2 Simplifier au maximum

$a^4 a^7$ $\quad x^{12} x^{-2}$ $\quad \dfrac{y^5 y}{y^6}$ $\quad (z^3)^5$ $\quad (b^{-4})^{-5}$ $\quad \dfrac{(c^4)^3}{c^{11}}$ $\quad \dfrac{1}{w^{-2}}$

$\dfrac{x^0 x^6}{(x^{-3})^2}$ $\quad (2xy)^3 x^5$ $\quad \dfrac{a^2 b^3 c}{abc}$ $\quad \dfrac{(a^2 b)^{-3}}{(b^{-5})^2}$ $\quad \left(\dfrac{u^4}{u}\right)^2$ $\quad \left(\dfrac{s}{t}\right)^3 s t^2$ $\quad \left(\dfrac{u^5}{3u^2}\right)^2$

$\sqrt[3]{x^{15}}$ $\quad \sqrt[6]{x^3}$ $\quad (x^2)^{\frac{3}{5}}$ $\quad y^{\frac{7}{2}} y^{\frac{5}{6}}$ $\quad x^2 \sqrt[3]{x}$ $\quad \dfrac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{2}{9}}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{x^5}}{x^7}$

$\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad \dfrac{\sqrt[3]{x^5}\sqrt{x^7}}{\sqrt[6]{x}}$ $\quad \dfrac{\sqrt[3]{2a}\sqrt{75b}\sqrt[3]{4a^{11}}}{\sqrt{3b^5}}$

2. Bref rappel sur la notation scientifique

Un nombre est écrit en notation scientifique quand il se présente ainsi :

$a \cdot 10^z$ où a est un nombre décimal (positif ou négatif) tel que $1 \leqslant |a| < 10$
et z est un entier relatif

($|a|$ s'appelle la mantisse du nombre)

Exemples 3

$7800 = 7.8 \cdot 10^3$ $\quad 0.000925 = 9.25 \cdot 10^{-4}$ $\quad 30 = 3 \cdot 10^1$

$9 = 9 \cdot 10^0$ $\quad 10000 = 1 \cdot 10^4$

Exercice 3

Convertir en notation scientifique (avec au plus 3 chiffres après la virgule)

45’000’000’000 = 0.000’000’553’469 =

−387.26 = −0.90098 =

Convertir en notation usuelle (écriture décimale) :

$-6.51 \cdot 10^{-3}$ = $2.99 \cdot 10^5$ =

Convertir en notation scientifique (avec au plus 3 chiffres après la virgule)

$44.754 \cdot 10^{13}$ = $-0.007 \cdot 10^{-12}$ =

$890 \cdot 10^{-15}$ = $0.05 \cdot 10^{17}$ =

3. Quelques équations avec des puissances et des racines

Soit l'équation $x^r = a$, avec $a \neq 0$ et $r \neq 0$

Cette équation a pour solution : $x = a^{1/r}$, sauf dans les cas suivants :

si $a > 0$ et r est un entier relatif pair, alors $x = \pm a^{1/r}$
si $a < 0$ et r n'est pas une fraction avec un numérateur impair et un dénominateur impair, alors l'équation n'a pas de solution.

La deuxième exception nécessite un commentaire.

Le cas $x^2 = -9$ ne pose pas de problème. Cette équation n'a pas de solution parce qu'un carré ne peut donner un résultat négatif.

Mais il y a des cas plus subtils. Ainsi :
$x^{1/3} = -2$ a pour solution $(-2)^{1/(1/3)} = (-2)^3 = -8$, et en effet $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$; mais
$x^{2/6} = -2$ n'a pas de solution, car -8 ne convient pas, puisque :
$(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

Exemples 4

$x^3 = 15 \quad \rightarrow \quad x = 15^{1/3} = \sqrt[3]{15} \approx 2.466$

$x^4 = 10 \quad \rightarrow \quad x = \pm 10^{1/4} = \pm \sqrt[4]{10} \approx \pm 1.778$

$x^3 = -15 \quad \rightarrow \quad x = (-15)^{1/3} = \sqrt[3]{-15} \approx -2.466$

$x^4 = -10 \quad \rightarrow$ pas de solution (a négatif et r entier pair)

$x^{-3} = 15 \quad \rightarrow \quad x = 15^{1/(-3)} = 15^{-1/3} = \dfrac{1}{15^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{15}} \approx \dfrac{1}{2.466} \approx 0.405$

$x^{-4} = 10 \quad \rightarrow \quad x = \pm 10^{1/(-4)} = \pm 10^{-1/4} = \dfrac{\pm 1}{10^{1/4}} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt[4]{10}} \approx \dfrac{\pm 1}{1.778} \approx \pm 0.562$

$\sqrt[3]{x} = 15 \quad \rightarrow \quad x^{1/3} = 15 \quad \rightarrow \quad x = 15^{1/(1/3)} = 15^3 = 3375$

$\sqrt[4]{x} = 10 \quad \rightarrow \quad x^{1/4} = 10 \quad \rightarrow \quad x = 10^{1/(1/4)} = 10^4 = 10000$

$\sqrt[3]{x} = -15 \quad \rightarrow \quad x^{1/3} = -15 \quad \rightarrow \quad x = (-15)^{1/(1/3)} = (-15)^3 = -3375$

$\sqrt[4]{x} = -10 \quad \rightarrow \quad x^{1/4} = -10 \quad \rightarrow$ pas de solution (a négatif et r fraction avec dénominateur pair)

$\sqrt[5]{x^4} = 7 \quad \rightarrow \quad x^{4/5} = 7 \quad \rightarrow \quad x = 7^{5/4} = \sqrt[4]{7^5} \approx 11.386$

$x^{0.8} = 7 \quad \rightarrow \quad x = 7^{1/0.8} = 7^{1.25} \approx 11.386$

$x^{0.8} = -7 \quad \rightarrow$ pas de solution (a négatif et r n'est pas exprimé sous forme de fraction avec numérateur et dénominateur tous deux impairs)

Exercice 4 Résoudre

a) $x^5=20$

b) $x^5=-20$

c) $x^{-5}=100$

d) $x^{-5}=-100$

e) $\sqrt[5]{x}=2$

f) $\sqrt[5]{x}=-2$

g) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=10$

h) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=-10$

i) $\sqrt[3]{x^5}=4$

j) $\sqrt[3]{x^5}=-4$

k) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}=2$

l) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}=-2$

m) $x^6=300$

n) $\frac{1}{x^4}=3$

o) $\frac{1}{x^2}=-1$

p) $\sqrt{x}=9$

q) $\sqrt[4]{x}=8$

r) $\frac{1}{\sqrt{x}}=4$

s) $\sqrt[4]{x^3}=10$

t) $\sqrt[4]{x^3}=-10$

u) $x^{0.4}=13$

v) $x^{-0.4}=5$

w) $\sqrt[10]{x}\cdot x^{1.7}\cdot(x^{2.6})^2=21$

x) $\frac{x^3\cdot\sqrt[5]{x}}{x^4}=0.7$

*

Histoire de rigoler, compliquons un peu les équations !

Exemples 5

a)

$2\sqrt{x-1}+3=13$ Isolons d'abord la racine :

$\sqrt{x-1}=\frac{13-3}{2}=5$ c-à-d :

$(x-1)^{1/2}=5$ d'où :

$x-1=5^2=25$ et enfin :

$x=25+1=26$

b)

$3(x+1)^4-5=29995$ Isolons d'abord la puissance :

$(x+1)^4=\frac{29995+5}{3}=10000$ d'où :

$x+1=\pm 10000^{1/4}=\pm\sqrt[4]{10000}=\pm 10$

$x=-1\pm 10$ c-à-d :

$x_1=-1+10=9$ et $x_2=-1-10=-11$

Exercice 5 Résoudre

a) $\sqrt{1-x}=4$

b) $\sqrt{x+5}=-12$

c) $2\sqrt{11-x}-27=13$

d) $-2\sqrt[3]{x}=10$

e) $3\sqrt[4]{5x-1}=7$

f) $\sqrt{x-9}+1.5=1.3$

g) $\sqrt[3]{5-x}=-0.8$

h) $4\sqrt{x}+5\sqrt{x}+2=17$

i) $\sqrt[3]{\frac{x}{5}}=2$

j) $\sqrt[3]{\frac{5}{x}}=2$

k) $3\sqrt{5x^2+3x+1}=21$

l) $\frac{1}{\sqrt[5]{x+2}}+8=7.4$

m) $7(x+1)^5+4=100$

n) $(3x-5)^4=157$

o) $2x^4+5=11$

p) $2x^4-5=-11$

q) $-2x^7+5=11$

r) $3x^{0.12}+1=5$

s) $x^{2/3}+23=3$

t) $(2x)^{3/2}=5$

u) $16.5x^{0.6}=1.97$

v) $(5x+3)^{0.75}=81$

w) $15(10-x)^6-13=59$

x) $5(3x)^4=371$

<u>Exercice 6</u> Résoudre

a) $\sqrt[6]{5x^4-7}=2.5$

b) $\sqrt[6]{5x^4-7}=-2.5$

c) $\sqrt[3]{5x^4-7}=-2.5$

d) $\sqrt[3]{5x^4-7}=-1.5$

e) $(5x^4-7)^2=9$

f) $(5x^4-7)^2=144$

g) $(5x^4-7)^2=-144$

h) $(5x^4-7)^3=-144$

i) $(5x^3-7)^2=144$

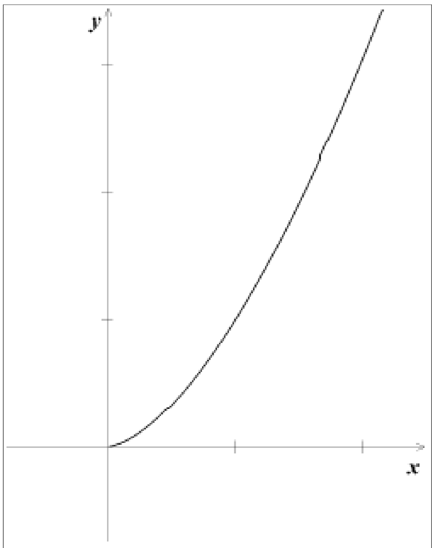
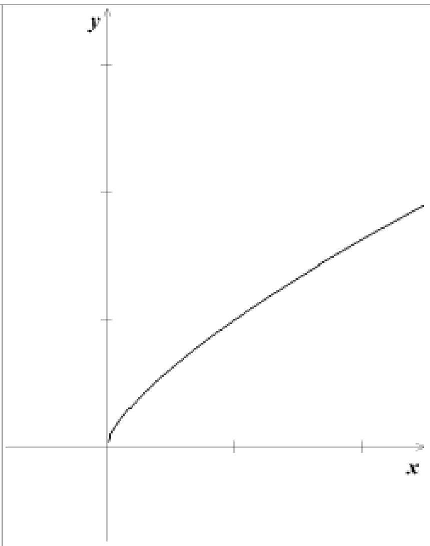
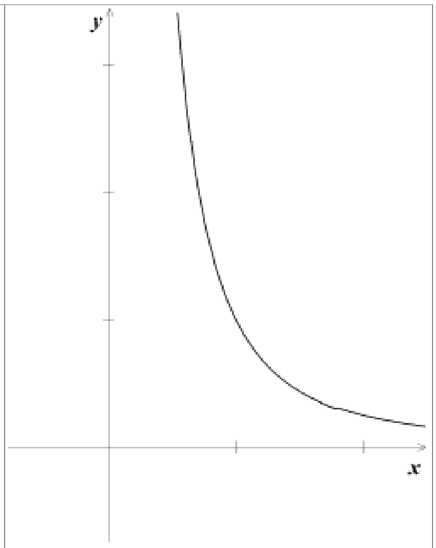
j) $5(5x^3-7)^3-7=0$

4. Fonctions puissances et notion de réciproque

Les fonctions puissances sont de la forme : $y = f(x) = x^r$ (avec $r \neq 0$ et $r \neq 1$)

Limitons-nous à les considérer seulement pour $x \geqslant 0$

Graphiquement, nous obtenons :

		
r > 1	1 >r >0	r < 0
Si x → ∞, alors x^r → ∞	Si x → ∞, alors x^r → ∞	Si x → ∞, alors x^r → 0 (asymptote horizontale y= 0) Si x → 0, alors x^r → ∞ (asymptote verticale x = 0)

Exercice 7

Soient les fonctions : $y = f(x) = x^{1.5}$ $y = g(x) = x^{0.65}$ $y = h(x) = x^{-1.3}$

Compléter le tableau et représenter graphiquement ces trois fonctions
(pour x variant de 0 à 3)

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
f(x)							
g(x)							
h(x)							

Notion de réciproque

Soit une fonction $y=f(x)$

S'il est possible d'isoler x en obtenant une expression unique : $x={}^{R}f(y)$,
la fonction ${}^{R}f$ s'appelle la réciproque de la fonction f

Pour $x\geqslant 0$, $r\neq 0$ et $r\neq 1$, la réciproque de $y=x^{r}$ est $x=y^{1/r}$

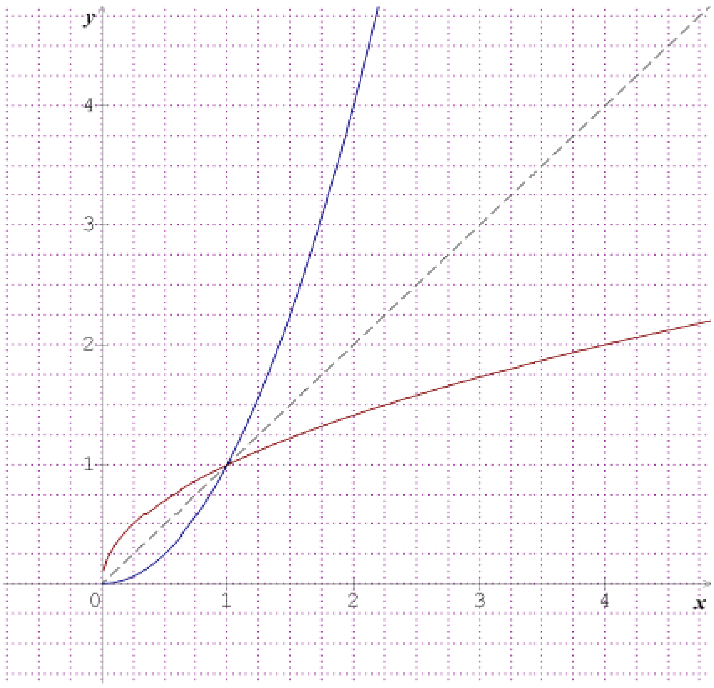
En particulier, la réciproque de $y=x^{2}$ est $x=y^{1/2}=\sqrt{y}$
la réciproque de $y=x^{3}$ est $x=y^{1/3}=\sqrt[3]{y}$
la réciproque de $y=x^{-2}=\dfrac{1}{x^{2}}$ est $x=y^{-1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Si, dans la fonction réciproque de f , on permute x et y,
la représentation graphique de $y={}^{R}f(x)$ peut s'obtenir à partir de celle de $y=f(x)$
au moyen d'une symétrie d'axe oblique à 45° (l'axe d'équation $y=x$)

Exemple 6

Soit $y=f(x)=x^{2}$. Sa réciproque est $x={}^{R}f(y)=\sqrt{y}$. Permutons x et y dans la réciproque, cela nous donne $y={}^{R}f(x)=\sqrt{x}$.

Représentons graphiquement f et ${}^{R}f$:



Exercice 8

Soit $y=f(x)=0.45\,x^{1.65}$

a) Trouver sa réciproque $x={}^{R}f(y)$

b) Permuter x et y dans la réciproque

c) Remplir le tableau :

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x)$											
${}^{R}f(x)$											

d) Représenter graphiquement f , ${}^{R}f$ et l'axe oblique à 45°

Exercice 9

Adolphe Quételet, un savant belge du 19e siècle, pionnier de la statistique, s'était mis en tête d'étudier une idée qu'on peut juger horrible, celle d'un « homme moyen ». C'est à lui qu'on doit le fameux indice de masse corporelle. Voici une des formules de Quételet (elle est aujourd'hui probablement dépassée, les anatomies ayant changé, surtout dans certains pays comme les USA) :

$W=24.365\,h^{1.7}$ où W est la masse en kg
et h est la taille en m, comprise entre 1.6 et 1.9,
d'une « femme moyenne » au 19e siècle.

a) Compléter le tableau et donner une représentation graphique de cette fonction.

h	1.6	1.65	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9
W							

b) Donner la réciproque de cette fonction.

c) Trouver h pour un poids W de 65 kg.

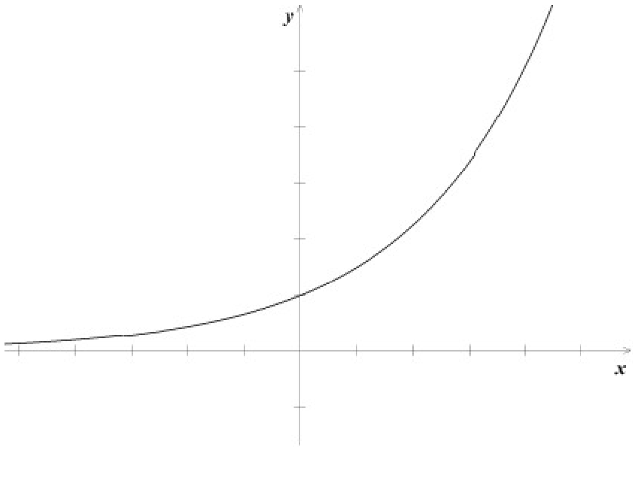
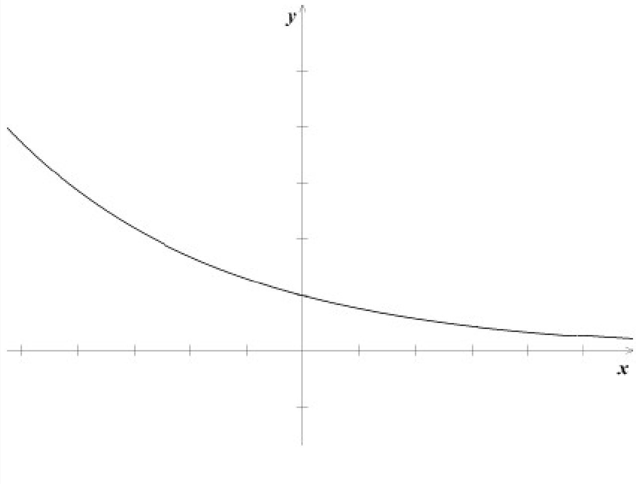
5. Fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont de la forme : $y=f(x)=a^x$ (avec $a>0$ et $a\neq 1$)

a s'appelle la base. On parle d'exponentielle de base a.

Une autre notation de a^x est $\exp_a(x)$

Graphiquement, nous obtenons :

	
a > 1	1 > a > 0
exponentielle croissante Si x → −∞, alors a^x → 0 (asymptote horizontale à gauche y = 0) Si x → ∞, alors a^x → ∞	exponentielle décroissante Si x → −∞, alors a^x → ∞ Si x → ∞, alors a^x → 0 (asymptote horizontale à droite y = 0)

Remarque

En posant $a=b^{-1}$ dans a^x , nous obtenons : $(b^{-1})^x$, c-à-d b^{-x} .

Or, si 1 > a > 0, alors b > 1.

En particulier :

$0.5^x=2^{-x}$ $0.\overline{3}^x=3^{-x}$ $0.25^x=4^{-x}$ $0.2^x=5^{-x}$

Ainsi, toute exponentielle décroissante peut s'écrire b^{-x} , avec b > 1

Exercice 10

Soient les fonctions : $y = f(x) = 1.3^x$ et $y = g(x) = 0.7^x$

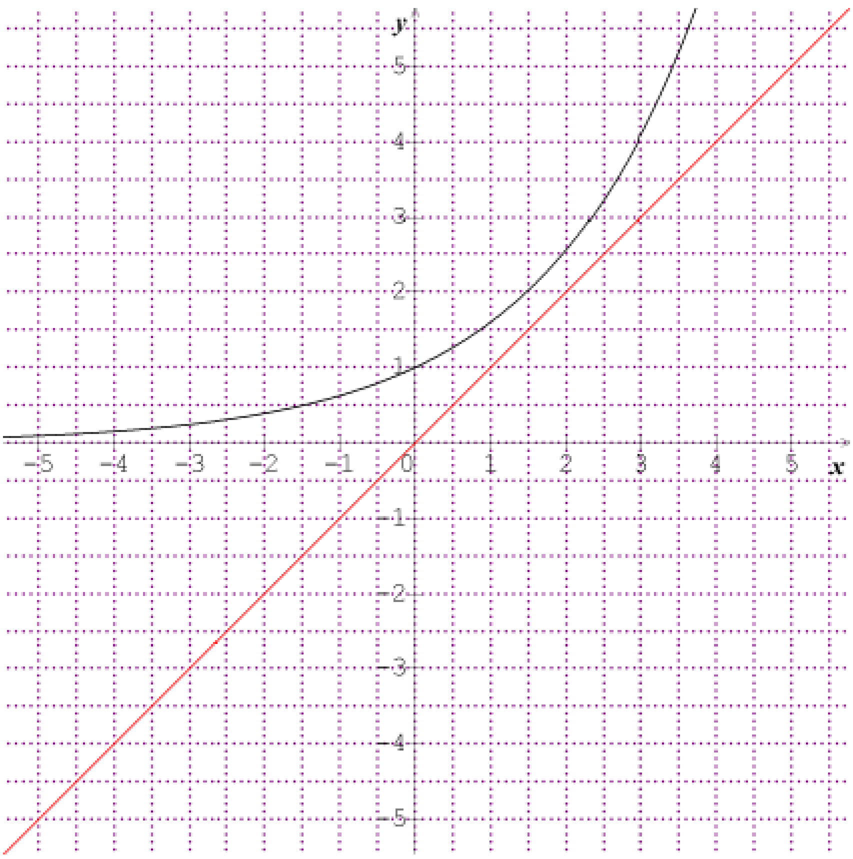
Compléter le tableau et représenter graphiquement ces deux fonctions

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)											
g(x)											

Exercice 11

Voici le graphique de l'exponentielle de base 1.6 : $y = f(x) = 1.6^x$
et d'une droite à 45°

Au moyen de la symétrie d'axe à 45°, représenter approximativement la réciproque de cette exponentielle. Une telle réciproque s'appelle un logarithme (plus précisément, il s'agit ici d'un logarithme en base 1.6). Nous en reparlerons plus loin.



Une petite leçon de capitalisme

Soit un capital $C_0 = 15'000$ francs. Il est déposé sur un compte offrant un taux d'intérêt annuel de 2.25%. Exprimons ce taux sous forme décimale et notons-le *i* : $i = 0.0225$.
Au terme de chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital, ce qui l'augmente exponentiellement. On parle d'un dépôt à intérêts composés.

Au bout de la première année, il devient :
$C_1 = C_0 \cdot (1+i) = 15'000 \cdot (1+0.0225) = 15'337.50$ francs
Au bout de la deuxième année, il devient :
$C_2 = C_1 \cdot (1+i) = 15'337.50 \cdot (1+0.0225) = 15'682.59$ francs
Au bout de la troisième année, il devient :
$C_3 = C_2 \cdot (1+i) = 15'682.59 \cdot (1+0.0225) = 16'035.45$ francs
etc.

Il n'est pas difficile de voir que la formule générale est :

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1+i)^n}$$

Exercice 12

Un capital $C_0 = 15'000$ francs est déposé à intérêts composés sur un compte offrant un taux d'intérêt annuel de 2.25%. Quel sera le capital au bout de 10 ans ?

Exercice 13

Quel capital initial faut-il déposer à intérêts composés sur un compte offrant un taux d'intérêt annuel de 0.75%, pour avoir un capital de 50'000 francs au bout de 20 ans ?

Exercice 14

À quel taux d'intérêt annuel faut-il déposer un capital initial de 27'670 francs pour avoir au bout de 10 ans un capital de 30'000 francs ?

Exercice 15

À quel taux d'intérêt annuel faut-il déposer un capital pour qu'il double en 25 ans ?
[Indication : remplacer C_{25} par $2C_0$ dans la formule générale et simplifier les C_0]

Exercice 16

Isoler C_0 dans la formule générale.

Exercice 17

Isoler *i* dans la formule générale.

Exercice 18

Quel capital initial faut-il déposer à intérêts composés sur un compte offrant un taux d'intérêt annuel de 3.5%, pour avoir un capital de 26'000 francs au bout de 10 ans, 5 mois et 23 jours ?
[Indication : pour simplifier les calculs, une année bancaire comporte 12 mois de 30 jours, c'est-à-dire 360 jours. Ainsi, pour convertir ici la durée *n* en nombre décimal, il faut prendre : $n=10+\frac{5}{12}+\frac{23}{360}$]

Exercice 19

À quel taux d'intérêt annuel faut-il déposer un capital pour qu'il triple en 6 ans, 7 mois et 8 jours ?

*

Un placement à intérêts composés peut se faire d'une autre manière.
Comme avant, considérons un capital initial C_0 et un taux annuel *i* (exprimé sous forme décimale). Mais divisons l'année en *n* périodes. Un intérêt est ajouté au terme de chaque période et nous voulons connaître le capital au bout de *x* années, c'est-à-dire de *nx* périodes. La formule devient alors :

$$\boxed{C_{nx}=C_0\cdot\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nx}}$$

Exemple 7

Divisons l'année en 12 périodes d'un mois. Prenons un taux annuel incroyable de 32% et plaçons un capital initial de 7'000 francs. Quel est le capital au bout de 3 ans ?

Réponse : $C_{36}=7000\cdot\left(1+\frac{0.32}{12}\right)^{36}=18'053.39$ francs

Exemple 8

Avec un taux annuel encore plus incroyable de 100% et un capital initial de 1 franc, la formule devient :

$C_{nx}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ que l'on peut écrire aussi : $C_{nx}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{x}$

Regardons ce que donne cette formule pour des valeurs de plus en plus grandes de n.

n	$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{x}$
1	2^x
10	2.59374246^x
100	2.70481383^x
1’000	2.71692393^x
10’000	2.71814593^x
100’000	2.71826824^x
1’000’000	2.71828047^x
10’000’000	2.71828169^x
100’000’000	2.71828182^x
1’000’000’000	2.71828183^x
10’000’000’000	2.71828183^x

Nous voyons que 1 franc, placé à 100% pendant x années, où chaque année est divisée en n périodes de comptabilisation des intérêts, donne un capital qui, pour n →∞, tend vers une exponentielle de base **2.7182818.......**

En hommage à Euler, cette base est notée **e**.

L’exponentielle de base e : e^x est parfois nommée exponentielle naturelle

Cette exponentielle joue un rôle très important en mathématiques et en physique.

Le nombre $e \approx 2.71828$ comporte une infinité de décimales. Il est irrationnel.

Exercice 20

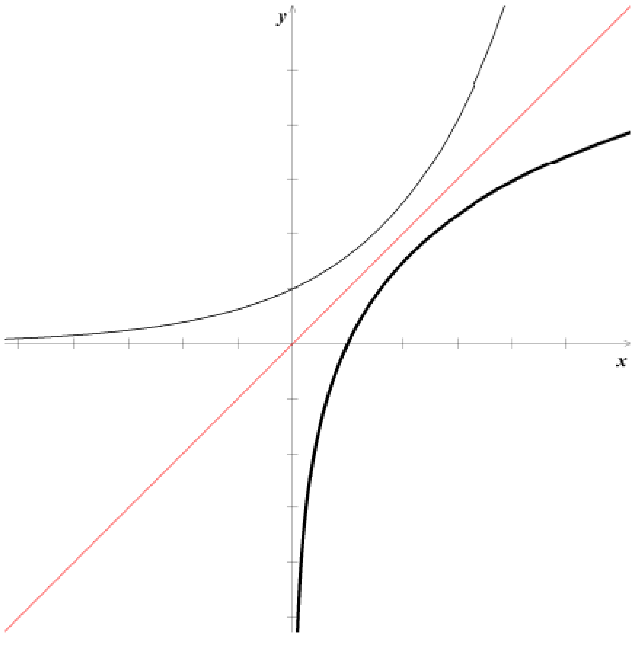
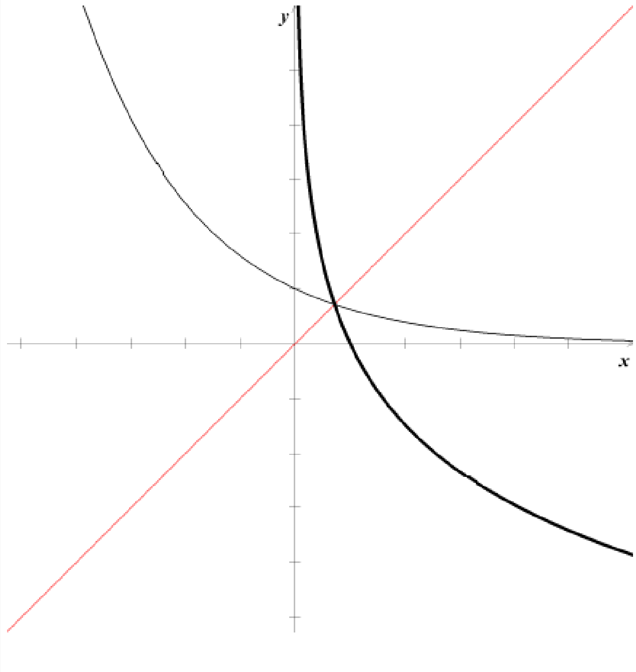
Avec la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à la quatrième décimale :

$e^2 =$ $e^3 =$ $e^{3.5} =$ $e^{0.4} =$

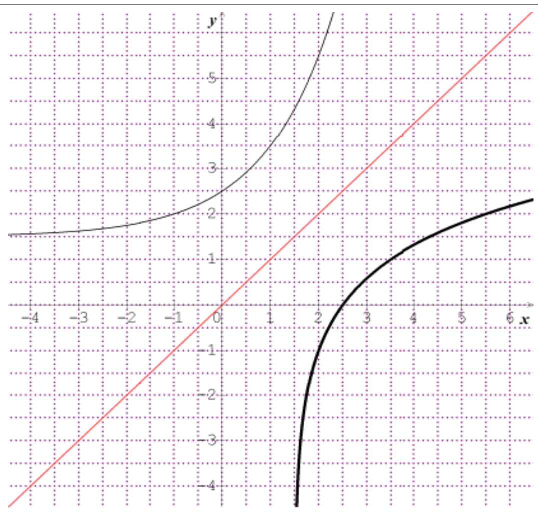
$e^{-0.5} =$ $e^{-1.7} =$ $e^{-3} =$

6. Logarithmes

Un logarithme en base a est la réciproque d'une exponentielle de base a. On le note $\log_a$

	
a > 1	1 > a > 0
Domaine de définition : x > 0 logarithme croissant Si x → ∞, alors $\log_a(x)$ → ∞ Si x → 0+, alors $\log_a(x)$ → −∞ (asymptote verticale x = 0)	Domaine de définition : x > 0 logarithme décroissant Si x → ∞, alors $\log_a(x)$ → −∞ Si x → 0+, alors $\log_a(x)$ → ∞ (asymptote verticale x = 0)

Exemple 9

Soit la fonction $y=f(x)=2^x+1.5$ Sa réciproque s'obtient en isolant x : $2^x=y-1.5$ $x=\log_2(y-1.5)$ En permutant x et y, nous obtenons : $y={}^Rf(x)=\log_2(x-1.5)$ Domaine de définition de ${}^Rf$: x > 1.5	

Exercice 21

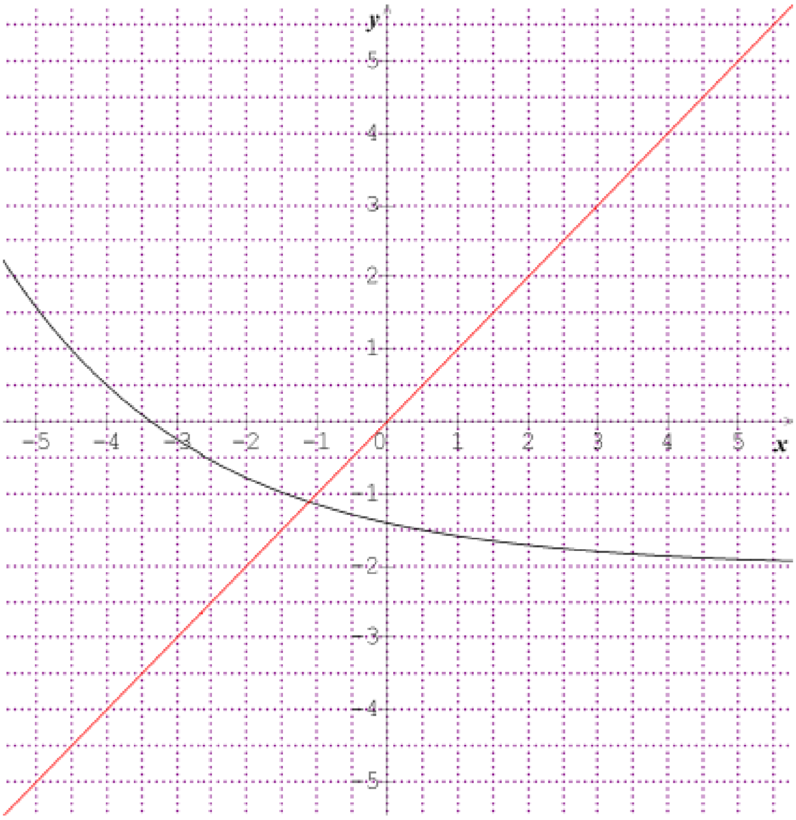
Soit la fonction $y=f(x)=0.6\cdot 0.7^x-2$

a) Isoler x dans cette équation, de manière à obtenir $x={}^Rf(y)$

b) Permuter x et y dans l'égalité précédente, de manière à obtenir $y={}^Rf(x)$

c) Quel est le domaine de définition de ${}^Rf$?

d) Au moyen de la symétrie d'axe à 45°, représenter approximativement ${}^Rf$ sur le graphique suivant, où la fonction f est déjà dessinée.



*

Calculons quelques logarithmes

Par définition, nous avons l'équivalence suivante :

$$\log_a(y)=x \quad \leftrightarrow \quad a^x=y$$

En d'autres termes, $\log_a(y)$ est la solution x de l'équation $a^x=y$.

Exemples 10

$\log_{10}(1000)$ est la solution de l'équation $10^x=1000$. Cette solution est $x=3$.
Ainsi : $\log_{10}(1000)=3$

$\log_5(25)$ est la solution de l'équation $5^x=25$. Cette solution est $x=2$.
Ainsi : $\log_5(25)=2$

$\log_2(\frac{1}{16})$ est la solution de l'équation $2^x=\frac{1}{16}$.
Or $\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$, donc cette solution est $x=-4$.
Ainsi : $\log_2(\frac{1}{16})=-4$

$\log_7(\sqrt[3]{49})$ est la solution de l'équation $7^x=\sqrt[3]{49}$.
Or $\sqrt[3]{49}=\sqrt[3]{7^2}=7^{2/3}$, donc cette solution est $x=2/3$.
Ainsi : $\log_7(\sqrt[3]{49})=2/3$

Exercice 22 Calculer

a) $\log_{10}(100'000)=$
b) $\log_{10}(0.01)=$
c) $\log_{10}(1)=$
d) $\log_3(9)=$
e) $\log_3(27)=$
f) $\log_3(1/3)=$
g) $\log_3(\sqrt{3})=$
h) $\log_3(1/\sqrt{3})=$
i) $\log_2(32)=$
j) $\log_2(1/32)=$
k) $\log_2(\sqrt{32})=$
l) $\log_2(1/\sqrt{32})=$
m) $\log_4(32)=$
n) $\log_8(32)=$

L'invention des logarithmes remonte au 17e siècle. Le responsable de cette merveille destinée à simplifier de nombreux calculs (oui ! oui !) est un Écossais :

John Napier (ou Neper)

Les logarithmes sont principalement employés dans trois bases :

en base 2 : <u>logarithmes binaires</u> $\log_2(x)$
en base 10 : <u>logarithmes décimaux</u> $\log_{10}(x)$ ou noté simplement $\log(x)$
en base e : <u>logarithmes naturels</u> $\log_e(x)$ ou noté simplement $\ln(x)$

Les logarithmes binaires sont utilisés en musique et en informatique.
Les logarithmes décimaux sont utilisés en astronomie, en acoustique, en chimie, en sismologie, etc.
Les logarithmes naturels sont utilisés en physique, en chimie, en médecine, en épidémiologie, en dynamique des populations, en climatologie, etc.

Les calculatrices électroniques fournissent généralement les logarithmes décimaux et les logarithmes naturels, mais pas toujours les autres.

Pour obtenir un logarithme en base a à partir de logarithmes décimaux, nous pouvons utiliser la formule :

$$\boxed{\log_a(x)=\frac{\log(x)}{\log(a)}}$$

<u>Exemple 11</u>

$$\log_2(50)=\frac{\log(50)}{\log(2)}\approx 5.6439$$

<u>Exercice 23</u> Calculer à l'aide d'une machine

a) $\log(20)=$
b) $\ln(20)=$
c) $\log_5(20)=$
d) $\log_7(4)=$
e) $\log_3(0.2)=$
f) $\ln(0.5)=$
g) $\log(e^3)=$
h) $\ln(e^3)=$

*

Les logarithmes ont beaucoup de propriétés. En voici une qui permet de convertir en notation scientifique une puissance à exposant élevé.

$$\boxed{\log_a(x^r)=r\cdot\log_a(x)}$$

Exemple 12

Comment écrire 837^{246} en notation scientifique ?

Appelons N ce nombre et calculons d'abord $\log(N)$ à l'aide de la formule ci-dessus.

$$\log(N)=\log(837^{246})=246\log(837)\approx 718.9904627$$

L'équivalence $\log_a(y)=x \quad \leftrightarrow \quad a^x=y$,
avec $a=10$, $y=N$ et $x=718.9904627$, nous permet d'écrire :

$$N=10^{718.9904627}$$

Décomposons 718.9904627 en 718 + 0.9904627. Il en découle :

$$N=10^{718.9904627}=10^{718+0.9904627}=10^{0.9904627}\cdot 10^{718}=9.7828\cdot 10^{718}$$

Pas mal, non ?

Exercice 24

Écrire 763^{-524} en notation scientifique.

*

Sans les utiliser pour le moment, mentionnons quelques autres propriétés des logarithmes :

$$\log_a(1)=0 \qquad \log_a(a)=1$$

$$\log_a(uv)=\log_a(u)+\log_a(v) \qquad \log_a\left(\frac{u}{v}\right)=\log_a(u)-\log_a(v)$$

7. Équations exponentielles

Nous avons vu qu'un logarithme est la solution d'une équation exponentielle simple, plus précisément : $\log_a(y)$ est la solution x de l'équation $a^x = y$.

Cela nous permet de résoudre diverses équations où l'inconnue se trouve dans un exposant.

Exemples 13

$10^x = 13 \quad \to \quad x = \log_{10}(13) = \log(13) \approx 1.1139$

$e^x = 25 \quad \to \quad x = \log_e(25) = \ln(25) \approx 3.3189$

$3^x = 7 \quad \to \quad x = \log_3(7) = \dfrac{\log(7)}{\log(3)} \approx 1.7712$

$5 \cdot 7^x - 8 = 10 \quad \to \quad 7^x = \dfrac{10+8}{5} = 3.6 \quad \to \quad x = \log_7(3.6) = \dfrac{\log(3.6)}{\log(7)} \approx 0.6583$

$e^{2x+3} = 0.4 \quad \to \quad 2x + 3 = \log_e(0.4) = \ln(0.4) \quad \to \quad x = \dfrac{\ln(0.4) - 3}{2} \approx -1.9581$

Exercice 25 Résoudre

a) $10^x = 137$

b) $10^x = -100$

c) $7^x = 12$

d) $e^x = 0.01$

e) $e^{2x} = 10$

f) $2^{-3x} = 5$

g) $2 \cdot 10^x = 50$

h) $3 \cdot e^{-x} = 7$

i) $2^{5-x} = 13$

j) $10^{4-5x} = 0.75$

k) $2 \cdot e^{1+2x} = 9$

l) $3.2 \cdot e^{-2.5x} = 70.13$

m) $3 \cdot e^{\sqrt{x}} + 1 = 22$

n) $\dfrac{1}{2^{1.73x}} = 10$

o) $\dfrac{15}{1 + 3 \cdot e^{-2x}} = 7$

p) $\sqrt[3]{10^{3x^2} - 5} = 4$

*

Ceux qui ont envie de s'amuser peuvent se frotter à des équations plus compliquées comme :

$$5^{3x-1}=2^{4-x}$$

$$5e^{x}+13=7e^{x+2}$$

$$5^{2x}+3.8=19.2\cdot 5^{x}$$

*

Revenons au capitalisme !

Il y a une chose que nous n'avons pas encore faite avec notre chère formule pour un placement à intérêts composés :

$$\boxed{C_n=C_0\cdot(1+i)^n}$$

où *i* est le taux d'intérêt annuel exprimé sous forme décimale
n est le nombre d'années du dépôt
C_0 est le capital initialement déposé
C_n est le capital au bout de n années de dépôt

Nous n'avons pas encore vu comment calculer la durée d'un placement quand tous les autres paramètres sont connus.

Exemple 14

Pendant combien de temps faut-il déposer un capital initial de 34'550 francs au taux d'intérêt annuel de 2.7% pour avoir à la fin un capital de 50'000 francs ?

Remplaçons les données dans la formule :

$$50'000=34'550\cdot(1+0.027)^n$$ Simplifions-la :

$$1.027^n=\frac{50'000}{34'550}\approx 1.447178$$ d'où :

$$n\approx\log_{1.027}(1.447178)=\frac{\log(1.447178)}{\log(1.027)}\approx 13.873448 \quad \text{années}$$

Convertissons cette durée en années + mois + jours
(avec la convention : 1 année = 12 mois, 1 mois = 30 jours)

$$0.873448\cdot 12=10.481376 \qquad 0.481376\cdot 30=14.44128$$

On obtient une durée de 13 ans + 10 mois + 14 jours

Exercice 26

Pendant combien de temps faut-il déposer un capital quelconque au taux d'intérêt annuel de 1.8% pour avoir à la fin un capital qui soit le double du capital initial ?

Exercice 27

Isoler *n* dans la formule $C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$

*

Un modèle ultra simpliste de croissance d'une population est :

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

où N_0 est la population de départ
a est une constante > 1
t est le temps

Exemple 15

Considérons la croissance d'une population de centaures. Posons le temps t en années et partons de l'hypothèse que la constante a vaut 1.618.

Si $N_0 = 40$, au bout de quel temps t aura-t-on $N(t) = 100$?

Il faut résoudre : $40 \cdot 1.618^t = 100$. On trouve : $1.618^t = \frac{100}{40} = 2.5$, d'où :

$t = \log_{1.618}(2.5) = \frac{\log(2.5)}{\log(1.618)} \approx 1.9$ ans, c-à-d environ 2 ans.

Exercice 28

Avec le même modèle et la même valeur de a , trouver le temps nécessaire pour qu'une population de centaures soit multipliée par 15.