D'Atropos à l'atropine

Les Moires ou Parques sont trois déesses du polythéisme gréco-latin. Images de la destinée, elles filent, dévident et coupent le fil de la vie des hommes. Ce sont Clotho qui file, Lachésis qui dévide, et Atropos qui coupe le fil de la vie.

Ce sont les sœurs symbolisant la Destinée, les Moires, ou Parques ou Nornes, dont la troisième s'appelle Atropos, l'Inexorable.
(Sigmund Freud, Le thème des trois coffrets)

Oui, je lui ferai voir par d'infaillibles marques
Qu'un véritable amour brave la main des Parques
(Corneille, Horace, acte IV, scène5)

Qu'Atropos et Tellus prennent, tassent les os
Des voyageurs au cœur barbare !
(Ovide, Les amours, élégie XVI)

On abattit un pin pour son antiquité,
Vieux Palais d'un hibou, triste et sombre retraite
De l'oiseau qu'Atropos prend pour son interprète.
(Jean de La Fontaine, Les Souris et le Chat-Huant, Fables, Livre XI)

Atropa belladona

La belladone est une plante à baies noires toxiques. Une dizaine de ces baies peut provoquer la mort d'un adulte. Son nom générique, Atropa, donné par Linné, correspond à celui de la Moire Atropos. Belladona vient de l'italien bella donna « belle dame ». À la Renaissance, les Italiennes élégantes instillaient dans leurs yeux du jus de belladone pour faire briller leur regard, en augmentant la pression de l'œil, et en dilatant la pupille. Cette mydriase rendait les femmes plus attirantes. La famille Borgia employait la belladone comme poison.

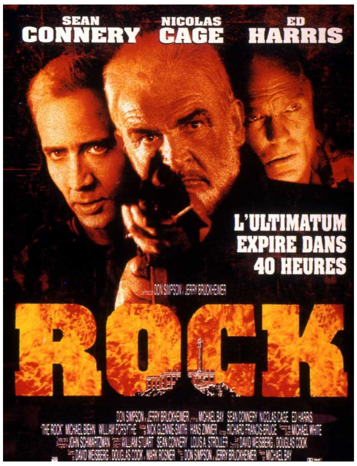
On l'appelle aussi notamment : cerise de juif, cerise du diable, guigne de côte, mandragore baccifère, morelle perverse.

Acherontia atropos

Sur les feuilles de l'Atropa belladona, il est possible de voir des chenilles de l'Acherontia atropos, ou Sphinx Tête de mort, un impressionnant papillon capable de produire un cri grâce à une petite lame située à l'entrée du pharynx. Ce cri ressemble au couinement d'une souris. Il est audible jusqu'à 40 m. Le terme Acherontia fait référence à l'Achéron de la mythologie grecque, l'un des fleuves des Enfers. Et nous retrouvons la Moire Atropos au second rang du nom de ce papillon.

Ce lépidoptère inspira une nouvelle à Edgar Allan Poe : « Le Sphinx » (https://fr.wikisource.org/wiki/Contes_inédits_%28Poe%29/Le_Sphinx)

Atropine



L'atropine est un alcaloïde présent dans plusieurs plantes. En 1809, le chimiste français Vauquelin en isole une forme impure à partir de l'Atropa belladonna. En 1822, Rudolph Brandes, un pharmacien allemand, nomme cette molécule active « atropine », en référence à la larve d'Acherontia atropos, le Sphinx tête de mort. L'atropine est un poison violent qui peut passer par de nombreux effets désagréables avant de conduire à la mort par paralysie cardio-respiratoire. On l'utilise en médecine à diverses fins. Comme collyre pour dilater les pupilles, comme antispasmodique, comme accélérateur de la fréquence cardiaque, comme antidote à l'inhalation de certains gaz toxiques, notamment ceux utilisés comme armes chimiques. Ainsi, dans le film *The Rock*, les forces spéciales devant reprendre Alcatraz sont équipées de seringues d'atropine. Le héros, Stanley Goodspeed, est contraint de s'injecter de l'atropine directement dans le cœur, pour survivre à une exposition au gaz VX, employé par des terroristes.

Exercice 29

L'antidote à une exposition à un gaz toxique tel que le VX ou le sarin est une injection d'une dose de 1 milligramme d'atropine. La quantité d'atropine dans le sang suit une loi de décroissance exponentielle :

$$Q(t)=Q_0 e^{-kt}$$

où $Q(t)$ est la quantité au temps *t* (en heures), Q_0 la quantité initiale et *k* une constante.

La demi-vie de l'atropine, c'est-à-dire le temps nécessaire au métabolisme pour éliminer du système sanguin la moitié de la quantité initiale, est de 2 heures.

a) Calculer la constante *k*.

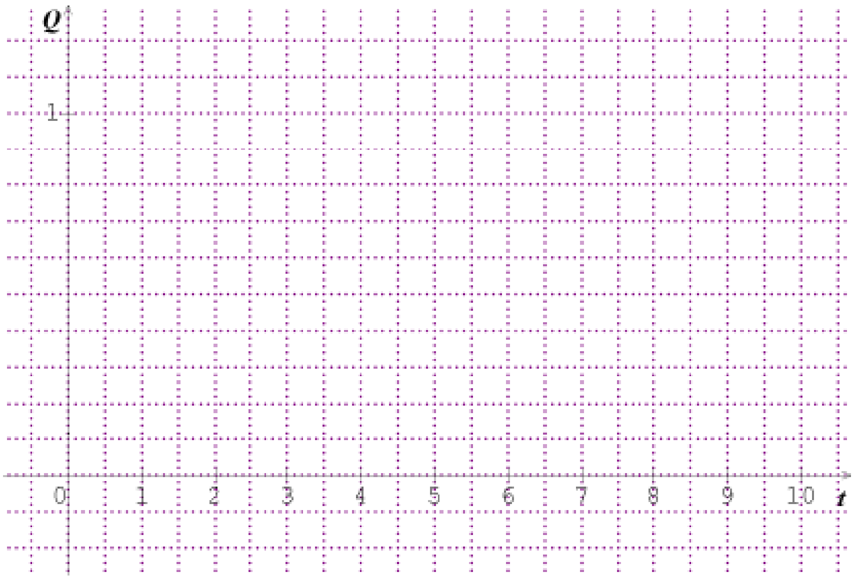
Indication : $\frac{Q(t)}{Q_0}=50\%=0.5$

b) Utiliser ce résultat pour déterminer le temps nécessaire à l'élimination de 90% de l'atropine.

Indication : $\frac{Q(t)}{Q_0}=10\%=0.1$

c) Compléter le tableau suivant et esquisser la représentation graphique de la courbe.

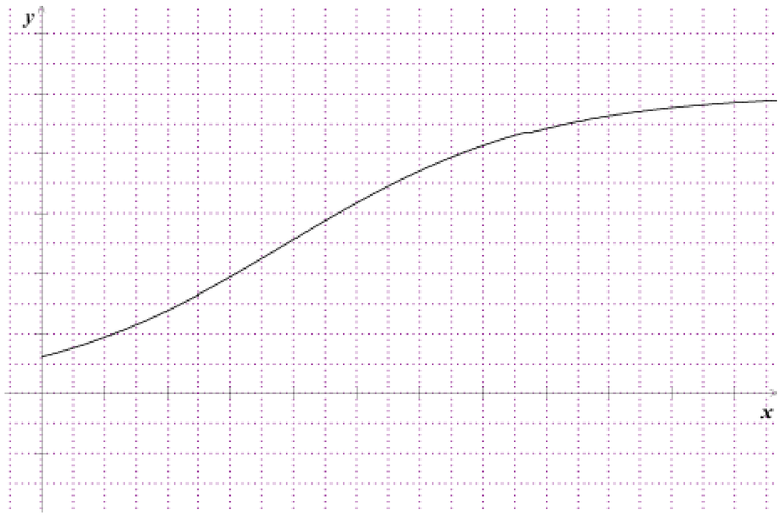
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Q(t)$										



Les fonctions logistiques en épidémiologie

Les fonctions logistiques forment la catégorie la plus simple de fonctions qui permettent de modéliser l'évolution temporelle de la proportion de personnes infectées par un virus ou une bactérie.

Ces fonctions ont l'allure suivante :



La formule algébrique d'une fonction logistique est :

$f(x)=\dfrac{a}{1+b\cdot e^{-cx}}$ où x est le temps en jours.

La valeur $f(0)=\dfrac{a}{1+b}$ est le pourcentage de personnes infectées à un moment que nous décidons de fixer comme temps zéro. Prenons par exemple 2.5 %

Ainsi $\dfrac{a}{1+b}=2.5$ donc $a=2.5(1+b)$ si bien que : $f(x)=\dfrac{2.5(1+b)}{1+b\cdot e^{-cx}}$

Cette fonction comporte une asymptote horizontale en $y=2.5(1+b)$. Posons cette valeur égale à 100 %, d'où :

$b=\dfrac{100}{2.5}-1=39$ de sorte que : $f(x)=\dfrac{100}{1+39\cdot e^{-cx}}$

Nous ne connaissons pas la valeur de c. Supposons : $c=0.024$

Exercice 30

Au bout de combien de jours, la proportion de personnes infectées sera-t-elle de

a) 5 % b) 50 % c) 75 % d) 90 %

Quelques autres lois exponentielles

En changeant les lettres, la formule vue dans l'exercice 29 : $Q(t)=Q_0 e^{-kt}$
s'applique aussi

à la décroissance radioactive : $A(t)=A_0 \cdot e^{-kt}$
(où $A(t)$ représente le taux de radioactivité au temps t)

à la pression atmosphérique : $P(h)=P_0 \cdot e^{-\alpha h}$
(où $P(h)$ représente la pression atmosphérique à l'altitude h)

à la loi de refroidissement de Newton : $T(t)=T_0 \cdot e^{-ct}$
(où $T(t)$ représente la température au temps t d'un objet mis à refroidir dans un milieu à température plus basse)

à la loi de Beer-Lambert : $I(x)=I_0 \cdot e^{-cx}$
(où $I(x)$ représente l'intensité d'un faisceau lumineux à une profondeur x sous le niveau de la mer ou d'un lac)

à la loi d'un courant électrique dans un circuit RL en série : $I(t)=I_0 \cdot e^{-Rt/L}$
(où $I(t)$ représente l'intensité du courant au temps t)

etc.

Nous avons aussi :

La loi d'Antoine sur la pression $P(T)$ d'une vapeur en fonction de sa température :

$$P(T)=e^{a+\frac{b}{c+T}}$$

La loi de von Bertalanffy sur la longueur $L(A)$ d'un poisson (d'une espèce donnée) en fonction de son âge :

$$L(A)=p(1-q e^{-rA})$$

etc.

Exercice 31

a) Isoler T dans la loi d'Antoine.

b) Isoler A dans la loi de Bertalanffy.

8. Équations logarithmiques

L'équivalence : $\log_a(u)=v \quad \leftrightarrow \quad u=a^v$
permet de résoudre bon nombre d'équations logarithmiques.

Exemples 16

$\log_2(x)=3.5 \quad \rightarrow \quad x=2^{3.5}\approx 11.3137$

$\log_5(x)=-0.7 \quad \rightarrow \quad x=5^{-0.7}\approx 0.3241$

$\log(x)=1.3 \quad \rightarrow \quad x=10^{1.3}\approx 19.9526$

$\ln(x)=-1 \quad \rightarrow \quad x=e^{-1}\approx 0.3679$

$5\cdot\log_2(x)+1=4 \quad \rightarrow \quad \log_2(x)=\frac{4-1}{5}=\frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad x=2^{3/5}\approx 1.5157$

$\ln(3x-2)=1.8 \quad \rightarrow \quad 3x-2=e^{1.8} \quad \rightarrow \quad x=\frac{e^{1.8}+2}{3}\approx 2.6832$

Exercice 32 Résoudre

a) $\log_{16}(x)=1.25$

b) $\ln(x)=3.4$

c) $\log(x)=-2.05$

d) $\log_x(13)=3$

e) $\log_x(13)=-5$

f) $\log_x(13)=\frac{5}{4}$

g) $\log_x(13)=2$

h) $4\log(5x)=9$

i) $3\ln(2x+1)=7$

j) $\log_2(1-x)+2=5$

k) $\log(-x)=-3$

l) $\sqrt{\ln(x)}=1.5$

m) $\log(5x+7)=-1$

n) $(\log_7(x)+2)^3=125$

o) $-4\ln(3x-5)+7=8$

p) $\log(\sqrt{x}+1.3)=0.11$

q) $\ln(5-3e^{2x})=0.9$

r) $\frac{1}{4-2\log(7x+6)}=3$

*

Une autre équivalence : $\log_a(u)=\log_a(v) \quad \leftrightarrow \quad u=v$
(avec la condition $u>0$ et $v>0$)
permet de résoudre de nouvelles équations logarithmiques, surtout si on prend en compte des propriétés comme :

$$\log_a(u)+\log_a(v)=\log_a(uv) \qquad \log_a(u)-\log_a(v)=\log_a\left(\frac{u}{v}\right)$$

Exemples 17

a) $\log(2x-5)=\log(x-3) \quad \rightarrow \quad 2x-5=x-3 \quad \rightarrow \quad x=2$

mais cette valeur est à rejeter, car, pour $x=2$, $2x-5<0$ et $x-3<0$

donc l'équation n'a pas de solution.

b) $\log(x+3)+\log(5)=\log(x+8) \quad \rightarrow \quad \log((x+3)\cdot 5)=\log(x+8) \quad \rightarrow$

$(x+3)\cdot 5=x+8 \quad \rightarrow \quad 5x+15=x+8 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-7}{4}=-1.75$

c) $\ln(2x+4)=2+\ln(x-3) \quad \rightarrow \quad \ln(2x+4)-\ln(x-3)=2 \quad \rightarrow$

$\ln\left(\frac{2x+4}{x-3}\right)=2 \quad \rightarrow \quad \frac{2x+4}{x-3}=e^2 \quad \rightarrow \quad 2x+4=(x-3)\cdot e^2 \quad \rightarrow$

$2x+4=e^2\cdot x-3\cdot e^2 \quad \rightarrow \quad 2x-e^2\cdot x=-3\cdot e^2-4 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-3\cdot e^2-4}{2-e^2}\approx 4.8556$

Exercice 33 Résoudre

a) $\log(5x+4)=\log(2x+17)$

b) $\ln(x-2)+\ln(10)=\ln(3x+5)$

c) $\log(x+7)-\log(5)=\log(x+1)$

d) $\ln(x-4)-\ln(2)=\ln(3-x)$

e) $\log(15x-6)-\log(3)=\log(x+4)+\log(2)$

f) $\ln(2x+9)-\ln(x-7)=3$

g) $\log(2x+11)-1.5=\log(x+6)$

Une formule qui fait du bruit

Gustav Fechner (un philosophe et savant du 19e siècle) est à l'origine de l'idée suivante : l'écart subjectif entre deux sensations serait proportionnel au logarithme du rapport des grandeurs physiques les provoquant. Appliquée à l'acoustique, cette idée a donné la formule suivante :

$L=100+20\log(\frac{p}{2})$ où p est la pression du son en pascals [Pa]

et L le niveau sonore en décibels [dB]

Par exemple, pour une pression de $2\cdot 10^{-3}$ Pa, le niveau sonore est de :
$L=100+20\log(10^{-3})=100+20\cdot(-3)=100-60=40$ dB

Remarque : la formule donnée correspond au système SPL (Sound Pression Level). Il existe aussi un système SIL (Sound Intensity Level), basé sur l'intensité *I* en W/m^2, qui définit une autre échelle de décibels à partir de la formule $L_i=120+10\log(I)$.

Exercice 34

a) Isoler p dans la formule $L=100+20\log(\frac{p}{2})$

b) Compléter le tableau suivant :

SON	**Pression p [Pa]**	**Niveau L [dB] (SPL)**
Seuil de l'audition		0
Chambre à coucher calme, de nuit		30
Conversation normale à une distance de 1 m	$2\cdot 10^{-2}$	
Aspirateur à une distance de 1 m	$6.3\cdot 10^{-2}$	
Camion diesel à une distance de 10 m		90
Tronçonneuse à une distance de 1 m		110
Seuil de la douleur	63	
Avion à réaction à une distance de 50 m	200	

c) Considérons deux sons, l'un de pression p_1 et de niveau L_1, l'autre d'intensité p_2 et de niveau L_2. Nous avons donc :

$L_1 = 100 + 20\log\left(\frac{p_1}{2}\right)$ et $L_2 = 100 + 20\log\left(\frac{p_2}{2}\right)$

Écrire une formule qui soit la plus simple possible pour $L_1 - L_2$

d) Compléter :

Si le rapport $\frac{p_1}{p_2}$ vaut 2, alors la différence $L_1 - L_2$ vaut ....

Si la différence $L_1 - L_2$ vaut 20, alors le rapport $\frac{p_1}{p_2}$ vaut ....

Quel est l'âge de ce crâne ?

La datation au carbone 14 repose sur le fait que la quantité présente de cet isotope radioactif dans un os diminue à partir de la mort selon une loi connue. Plus précisément, cette quantité est divisée par deux tous les 5734 ans (avec une marge d'erreur de 40 ans).

Dès lors, l'âge A d'un vieil os (jusqu'à 50'000 ans) peut être évalué en mesurant sa concentration C en carbone 14 :

C = (quantité de carbone 14) / (quantité totale de carbone).

La formule donnant A en fonction de C est :

$$A = -8272\ln\left(C\cdot 10^{12}\right)$$

Exercice 35

a) Si, pour un tibia trouvé dans une fouille archéologique, la concentration C vaut $3\cdot 10^{-13}$, quel est environ l'âge de ce tibia ?

b) Quelle est la concentration C d'un crâne vieux de 25'000 ans ?

c) Isoler C dans la formule.

Le réapprentissage selon Ebbinghaus

Au 19e siècle, Hermann Ebbinghaus se livra à des expériences sur la mémorisation et l'oubli. L'une des expériences se déroulait ainsi :

Il avait préparé de très nombreuses séries de 13 syllabes (sans signification).
Il en prenait une au hasard et la lisait à haute voix au rythme de 150 unités à la minute.
Après une pause de 15 secondes, une seconde lecture commençait.
Et ainsi de suite.

Il ne s'arrêtait qu'au moment où il pouvait réciter de mémoire la série complète.
Il notait le temps t_1 qu'avait nécessité cet apprentissage.

Après une durée T passée à faire autre chose, il recommençait la même tâche avec la même série et notait le temps t_2 que nécessitait ce réapprentissage.

Comme la mémoire avait gardé une trace du premier apprentissage, le temps t_2 était inférieur au temps t_1.

L'économie E de temps en % était $E=\frac{t_1-t_2}{t_1}\cdot 100$.

Il fit de même avec beaucoup d'autres séries de syllabes, en variant la durée T séparant l'apprentissage du réapprentissage.

Il construisit ainsi le graphique de E en fonction de T et chercha une formule qui rendrait compte de cette courbe.

Il trouva la formule suivante :

$$E=\frac{100\cdot 1.84}{(\log(60\,T))^{1.25}+1.84}$$ (pour une durée T en heures ≥ 1/60)

Exercice 36

a) Compléter le tableau suivant et tracer une représentation graphique
de la « courbe de l'oubli ».

T	0.25	0.5	1	5	10	20	30	40	50	60	100
E											

b) Trouvée la durée T pour que l'économie de temps descende à 10%.

Quelques autres lois logarithmiques

En chimie, le **pH d'une substance** a été défini comme l'opposé du logarithme décimal de la concentration des ions d'hydrogène (en moles/litre). La définition actuelle est plus compliquée.

En astronomie, la **magnitude apparente** m d'une étoile est définie par la loi de Pogson :

$m=-2.5\log(E)+c$, où E est l'éclat ou l'éclairement de l'étoile
et c est une constante d'étalonnage

En sismologie, la **magnitude d'un séisme** a été définie comme le logarithme décimal de l'amplitude maximale observée sur un sismographe d'un certain type à une distance de 100 km de l'épicentre. La définition actuelle est plus compliquée.

En thermodynamique, l'**entropie** S d'un système a été définie par :

$S=k_B\ln(\Omega)$, où k_B est la constante de Boltzmann
et Ω une grandeur compliquée mesurant
un nombre de configurations microscopiques