Dénombrement des schémas de rimes

Pascal Kaeser
Genève
e-mail : pascal.kaeser@edu.ge.ch

mars 2000

1 Nombre fixe d'ensembles de tailles fixes

1.1 Cas particulier

Combien peut-on conférer de schémas de rimes à une strophe de 10 vers, si l'on s'impose 4 rimes distinctes : 3 d'entre elles ayant 2 occurrences et 1 ayant 4 occurrences ?

Exemple 1.1

ABBCDDADCD, A : 2 occurrences, B : 2 occurrences, C : 2 occurrences et D : 4 occurrences.

Remarquons tout d'abord qu'un schéma de rimes est équivalent à une partition non ordonnée de l'ensemble des entiers de 1 à n, où n est le nombre de vers de la strophe. Ainsi, l'exemple précédent peut être codé par :

Formellement, une partition non ordonnée d'un ensemble E est un ensemble formé de sous-ensembles disjoints et non vides de E, dont la réunion donne E.

$$\{\{1;7\};\{2;3\};\{4;9\};\{5;6;8;10\}\}$$

ce qui signifie que :
– le 1er et le 7ème vers ont la même rime ;
– le 2ème et le 3ème vers ont la même rime ;
– le 4ème et le 9ème vers ont la même rime ;
– les 5ème, 6ème, 8ème et 10ème vers ont la même rime ;
et ces rimes ne sont pas les mêmes d'un ensemble à l'autre.

Revenons au problème posé en début de paragraphe. Il faut choisir successivement :
– 2 vers parmi 10, ce qui peut être fait de $C(10,2)$ manières ;
– 2 vers parmi les 8 qui restent, ce qui peut être fait de $C(8,2)$ manières ;
– 2 vers parmi les 6 qui restent, ce qui peut être fait de $C(6,2)$ manières ;
– 4 vers parmi les 4 qui restent, ce qui peut être fait de $C(4,4)$ manières.
Nous avons donc : $C(10,2)C(8,2)C(6,2)C(4,4)$ possibilités. Mais ce décompte est inexact, car les 3 ensembles de 2 vers ont été choisis selon les 3! ordres différents possibles, par exemple :

Rappelons que $C(n,k)$ désigne le nombre de sous- ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments, et vaut $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, où $x!$ désigne le produit des entiers de 1 à x (si $x > 0$) et $0! = 1$.

AABCBCDDDD, AACBCBDDDD, BBACACDDDD,
BBCACADDDD, CCABABDDDD et CCBABADDDD,

qui représentent le même schéma de rimes. C'est pourquoi nous devons diviser par 3! le résultat obtenu précédemment. Ainsi, la réponse est :

$$\frac{C(10,2)C(8,2)C(6,2)C(4,4)}{3!}$$

qui donne :

$$\frac{10!}{3!2!2!2!4!}$$

c'est-à-dire 3150.

1.2 Cas général

Combien peut-on conférer de schémas de rimes à une strophe de n vers, si l'on s'impose k rimes distinctes :

k_1 d'entre elles ayant 1 occurrence,
k_2 d'entre elles ayant 2 occurrences,
k_3 d'entre elles ayant 3 occurrences,
etc.,

où certains k_i peuvent être nuls, où la somme des k_i vaut k et la somme des ik_i vaut n ?

Notons ce nombre : $F(n, k, 1\diamondsuit k_1, 2\diamondsuit k_2, 3\diamondsuit k_3, etc.)$, où $i\diamondsuit k_i$ n'est écrit que si k_i est différent de zéro.

Dans le cas particulier précédent, nous avons calculé : $F(10, 4, 2\diamondsuit 3, 4\diamondsuit 1)$.

La formule générale est :

$$\frac{n!}{\prod_i k_i! i!^{k_i}} \tag{1}$$

2 Nombre fixe d'ensembles de tailles variables

2.1 En tolérant les vers blancs

Combien peut-on conférer de schémas de rimes à une strophe de 6 vers, si l'on s'impose 2 rimes distinctes, les nombres d'occurrences n'étant pas fixés ?

En se référant au paragraphe précédent, la réponse est donnée par :

$$F(6, 2, 1\diamondsuit 1, 5\diamondsuit 1) + F(6, 2, 2\diamondsuit 1, 4\diamondsuit 1) + F(6, 2, 3\diamondsuit 2) = 6 + 15 + 10 = 31$$

Mais ce procédé est délicat à mettre en oeuvre pour des nombres élevés de vers.

Notons $S(n, k)$ le nombre de schémas de rimes qu'on peut conférer à une strophe de n vers, si l'on s'impose k rimes distinctes, les nombres d'occurrences n'étant pas fixés.

Remarquons que certaines valeurs de $S(n, k)$ sont évidentes, par exemple : $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

Cherchons une formule récurrente pour $S(n,k)$. Nommons A la rime du premier vers. Parmi les $n-1$ vers restants, choisissons-en $j-1$, de manière à avoir j vers se terminant par la rime A. Nous avons pour ce choix $C(n-1,j-1)$ possibilités. Pour les $n-j$ vers qui restent, nous avons $S(n-j,k-1)$ possibilités. Donc :

$$S(n,k) = \sum_{j=1}^{n} C(n-1,j-1)S(n-j,k-1)$$

Le changement de variable $i = n-j+1$ livre :

$$S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} C(n-1,n-i)S(i-1,k-1)$$

Compte tenu que $C(n-1,n-i) = C(n-1,i-1)$, nous obtenons finalement :

$$S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} C(n-1,i-1)S(i-1,k-1) \qquad (2)$$

Si l'on veut que cette formule fonctionne pour n'importe quels $n > 0$ et $k > 0$, nous sommes conduits à définir : $S(0,0) = 1$, $S(n,0) = 0$ et $S(n,k) = 0$ pour $k > n$.

Dans la somme, il suffit alors de faire varier i de k à n (car $S(i-1,k-1) = 0$ pour $i < k$). Et, pour $k = 1$, seul le premier terme de la somme n'est pas nul, qui vaut $C(n-1,0)S(0,0) = 1$.

Exemple 2.1

$S(1,1) = 1$
$S(2,1) = 1$
$S(2,2) = C(1,1)S(1,1) = 1$
$S(3,1) = 1$
$S(3,2) = C(2,1)S(1,1) + C(2,2)S(2,1) = 3$
$S(3,3) = C(2,2)S(2,2) = 1$

Remarque 2.1

Les $S(n,k)$ s'appellent *Nombres de Stirling de deuxième espèce*. Il existe de nombreuses autres formules permettant de les calculer. En voici quelques unes :

$S(n,k) =$ dérivée n-ème en 0 de $\frac{(\exp(x)-1)^k}{k!}$.
$k!S(n,k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} C(k,i) i^n$ (nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments).
$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)$ (récurrence plus simple que celle nous avons démontrée, mais qui se généralise moins facilement à d'autres catégories de schémas de rimes).
$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$
$S(n,n-1) = C(n,2)$

2.2 En excluant les vers blancs

Notons $S^\star(n,k)$ le nombre de schémas de rimes qu'on peut conférer à une strophe de n vers, si l'on s'impose k rimes distinctes, les nombres d'occurrences n'étant pas fixés, et si l'on exclut les vers blancs (c'est-à-dire des vers qui ne riment avec aucun autre).

Le même raisonnement que celui utilisé pour produire la formule 2 permet d'obtenir :

$$S^\star(n,k) = \sum_{i=k}^{n-1} C(n-1,i-1)S^\star(i-1,k-1) \tag{3}$$

avec $S^\star(0,0) = 1$, $S^\star(n,0) = 0$ pour $n > 0$, $S^\star(1,1) = 0$, $S^\star(n,1) = 1$ pour $n > 1$ et $S^\star(n,k) = 0$ pour $k > n/2$.

Nous pouvons aussi exprimer $S(n,k)$ en fonction des $S^\star(n-i,k-i)$. En effet, un schéma comportant k rimes peut contenir exactement i vers blancs de $C(n,i)S^\star(n-i,k-i)$ manières possibles. En sommant sur i, nous obtenons :

$$S(n,k) = \sum_{i=0}^{k} C(n,i)S^\star(n-i,k-i) \tag{4}$$

Un procédé algébrique permet "d'inverser" une telle formule et d'obtenir :

$$S^\star(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C(n,i)S(n-i,k-i) \tag{5}$$

Remarque 2.2

Les $S^\star(n,k)$ font partie d'une classe nommée *Associated Stirling Numbers of second kind*. Voici quelques autres formules relatives à ces nombres :

$S^\star(n,k) =$ dérivée n-ème en 0 de $\frac{(\exp(x)-1-x)^k}{k!}$
$S^\star(n,2) = 2^{n-1} - 1 - n$

2.3 Schémas réductibles et irréductibles

Un schéma de rimes, conféré à une strophe de n vers, est dit réductible si les rimes des vers 1 à i (pour une ou plusieurs valeurs de i entre 1 et $n-1$) n'apparaissent pas dans les vers $i+1$ à n. Autrement, il est dit irréductible.

Exemple 2.2

ABABCCDDDE est un schéma réductible, la condition étant réalisée pour $i = 4$, $i = 6$ et $i = 9$. En fait, il se décompose en quatre schémas irréductibles, un quatrain, un distique, un tercet et un vers blanc : ABAB CC DDD E.

Exemple 2.3

ABABABCC (le schéma utilisé par Lord Byron dans son *Don Juan*) est réductible. Il se décompose en : ABABAB CC.

The mind is lost in mighty contemplation
Of intellect expended on two courses ;
And indigestion's grand multiplication
Requires arithmetic beyond my forces.
Who would suppose, from Adam's simple ration,
That cookery could have call'd forth such ressources,
As form a science and a nomenclature
From out the commonest demands of nature ?

(canto XV, stanza LXIX, voir [BYR])

Exemple 2.4

ABABBCBC (le schéma de la Petite Ballade) est irréductible.

<u>Testament</u>

Que trois rimes se répartissent,
Selon un schéma répété,
Entre trois huitains qui mûrissent
Et un paragraphe écourté
Qui couronne la vanité
D'une indécente dédicace !
Et qu'un revenant soit guetté :
Le refrain trouve ici sa place.

La petite ballade tisse,
En octosyllabes dentés,
Une toile où sans bruit se glisse
Un art lyrique ou décanté,
Mais en aucun cas déjanté,
Car la cour ferait la grimace.
Laissons Gilda se déganter :
Le refrain trouve ici sa place.

Faut-il qu'un poète rougisse
De vouloir encor s'allaiter
A cette mamelle en silice,
A ce tétin trop éreinté ?
Non, s'il sait ne pas imiter
Tout en suivant de près la trace.
Mais un vers risque d'irriter :
Le refrain trouve ici sa place.

A la ballade, art réputé,
Dont cet envoi est la postface.
N'en déplaise à la nouveauté,
Le refrain trouve ici sa place.

(P. Kaeser, [KAE2])

Exemple 2.5

ABABCCDDEDE (le schéma du Chant Royal) est réductible. Il se décompose en : ABAB CC DDEDE.

La Ballade et le Chant Royal sont des formes fixes qui datent du quatorzième siècle. Paul Valéry a écrit : *Auprès du Chant Royal, le sonnet est un jeu d'enfant.* Voir [MOR]

A la lumière de ces exemples, on voit que tout schéma réductible conféré à une strophe de n vers, peut être décomposé de manière unique en :

un schéma irréductible conféré à une sous-strophe formée des i premiers vers,

et un schéma (réductible ou irréductible) conféré aux $n-i$ vers suivants.

Définissons :

$IS(n,k)$ = le nombre de schémas irréductibles qu'on peut conférer à une strophe de n vers, si l'on s'impose k rimes distinctes, les nombres d'occurrences n'étant pas fixés, et si l'on tolère les vers blancs.

$IS^\star(n,k)$ = le nombre de schémas irréductibles qu'on peut conférer à une strophe de n vers, si l'on s'impose k rimes distinctes, les nombres d'occurrences n'étant pas fixés, et si l'on exclut les vers blancs.

En appliquant la décomposition décrite précédemment, nous obtenons les formules récurrentes :

$$IS(n,k) = S(n,k) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=max(1,k+i-n)}^{min(i,k-1)} IS(i,j)S(n-i,k-j) \qquad (6)$$

(valeurs aux bords : $IS(1,1)=1$ et, pour $n>1$, $IS(n,1)=1$, $IS(n,n)=0$).

$$IS^\star(n,k) = S^\star(n,k) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=max(1,k+i-n)}^{min(i,k-1)} IS^\star(i,j)S^\star(n-i,k-j) \qquad (7)$$

(valeurs aux bords : $IS^\star(1,1)=0$ et, pour $n>1$, $IS^\star(n,1)=1$, $IS^\star(n,n)=0$).

Remarque 2.3

A ma connaissance, ces définitions et formules sont inédites.

3 Nombre variable d'ensembles de tailles variables

Il est naturel de définir :

$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$, $B^\star(n) = \sum_{k=1}^{n} S^\star(n,k)$,
$IB(n) = \sum_{k=1}^{n} IS(n,k)$, $IB^\star(n) = \sum_{k=1}^{n} IS^\star(n,k)$

Ces quantités nous fournissent le nombre total de schémas de rimes (irréductibles pour les IB) qu'on peut conférer à une strophe de n vers, le nombre de rimes n'étant pas fixé, si l'on tolère (pas d'étoile) ou si l'on exclut (étoile) les vers blancs.

Les formules 2, 3, 6 et 7 nous livrent alors :

$$B(n) = \sum_{i=1}^{n} C(n-1, i-1)B(i-1) \tag{8}$$

(condition initiale : $B(0) = 1$).

$$B^{\star}(n) = \sum_{i=1}^{n} C(n-1, i-1)B^{\star}(i-1) \tag{9}$$

(conditions initiales : $B^{\star}(0) = 1$, $B^{\star}(1) = 0$).

$$IB(n) = B(n) - \sum_{i=1}^{n-1} IB(i)B(n-i) \tag{10}$$

(condition initiale : $IB(1) = 1$).

$$IB^{\star}(n) = B^{\star}(n) - \sum_{i=1}^{n-1} IB^{\star}(i)B^{\star}(n-i) \tag{11}$$

(condition initiale : $IB^{\star}(1) = 0$).

Remarque 3.1

Voici quelques autres formules relatives à ces nombres :

$B(n) =$ dérivée n-ème en 0 de $\exp(\exp(x) - 1)$
$B(n) = \sum_{i=0}^{n} C(n,i)B^{\star}(n-i)$
$B^{\star}(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C(n,i)B(n-i)$
$B^{\star}(n) = B(n-1) - B^{\star}(n-1)$ (formule de Becker).
$B^{\star}(n) =$ dérivée n-ème en 0 de $\exp(\exp(x) - 1 - x)$

Remarque 3.2

Les $B(n)$ s'appellent *Nombres de Bell.*

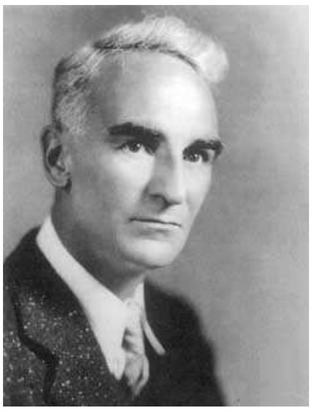

Fig. 1 E. T. Bell

Bell, surtout connu pour des livres tels que *Les Grands mathématiciens*, Payot, 1939 et *La mathématique, reine et servante des sciences*, Payot, 1952, écrivit aussi de nombreux ouvrages de science fiction sous le pseudonyme de John Taine.

Source de l'image : The MacTutor History of Mathematics

4 Prolongements possibles

Voici d'autres questions que l'on peut se poser au sujet du dénombrement des schémas de rimes.

Combien y a-t-il de schémas de rimes :
– palindromes (facile)
[exemple : ABCBBACABBCBA] ;
– où chaque rime apparaît au moins m fois (facile)
[généralisation des schémas sans vers blancs ($m = 2$)] ;
– où chaque rime apparaît un nombre pair de fois
[exemple : ABBABCBC] ;
– où un sous-schéma d'au moins p vers est répété m fois
[exemple : ABBC/ABBC/ABBC] ;
– où un sous-schéma d'au moins p vers est permuté m fois
[exemple : ABBC/BACB/ACBB] ;
– où le graphe obtenu en reliant par le haut les mêmes rimes est sans croisements (nombres de Catalan)
[exemple : ABBAACCCCA] ;
– etc. ?
Le domaine (théorie des partitions non ordonnées d'un ensemble ordonné fini) est vaste.

Un palindrome est un texte (ou, plus généralement, n'importe quelle succession de symboles, donc pourquoi pas un schéma de rimes) qui reste identique lorsqu'on le lit à l'envers.

5 Application

Supposons qu'on veuille écrire un texte en vers répondant au cahier des charges suivant :
– la taille sera comprise entre 2000 et 20000 vers ;
– les strophes comporteront le même nombre de vers ;
– chaque schéma de rimes d'une catégorie choisie sera adopté une et une seule fois.
Voici les possibilités (nombre total de vers du texte) pour les catégories $IB^\star$ et $IS^\star$ (schémas irréductibles sans vers blancs) jusqu'à $n = 12$:

$8IS^\star(8,3)$	3360
$8IB^\star(8)$	4872
$9IS^\star(9,2)$	2160
$9IS^\star(9,3)$	15560
$9IS^\star(9,4)$	9036
$10IS^\star(10,2)$	4940
$10IS^\star(10,5)$	7060
$11IS^\star(11,2)$	11044

Durant les siècles passés, la tendance, pour composer un texte versifié plutôt long, était de conférer le même schéma de rimes à toutes les strophes. A supposer que la littérature en vers ait encore un avenir (je le pense, même si notre époque lui tourne le dos), il pourrait être intéressant de rechercher au contraire la variété des schémas.

Références

[AQU] **M. Aquien**, *Dictionnaire de poétique*, Le Livre de Poche, 1993.

[BYR] **Lord Byron**, *Poetical works*, Oxford Univ. Press, 1970.

[CAM] **P.J. Cameron**, *Combinatorics : Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge Univ. Press, 1994.

[GAR] **M. Gardner**, *Les nombres de Bell*, in Jeux mathématiques, fascicule édité par Pour la Science, 1980.

[GRA] **R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik**, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley 2nd ed., 1994.

[KAE1] **P. Kaeser**, *Nouveaux exercices de style*, Diderot, 1997.

[KAE2] **P. Kaeser**, *Petit Dico Panpoétique De poétique Peinte illico*, inédit.

[LIN] **J. H. van Lint and R. M. Wilson**, *A course in combinatorics*, Cambridge Univ. Press, 1992.

[MOR] **H. Morier**, *Dictionnaire de poétique et de rhétorique*, PUF, 5ème éd., 1998.

[RIO] **J. Riordan**, *A budget of rhyme scheme counts*, pp. 455 - 465 of Second International Conference on Combinatorial Mathematics, New York, April 4-7, 1978. Edited by Allan Gewirtz and Louis V. Quintas. Annals New York Academy of Sciences, 319, 1979.

[SLO] **N.J.A. Sloane**, *An On-Line Version of the Encyclopedia of Integer Sequences.*

[WEI] **E.W. Weisstein**, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 1999.