De la suite dans les idées

1. Généralités sur les suites

Une suite numérique est une succession illimitée de nombres.
Elle est notée par une lettre indicée.
Un rang est une valeur de l'indice.
Le terme général est le terme de rang n (où n représente n'importe quel nombre entier plus grand ou égal à 1)

Exemple 1

La formule $6n-n^2-5.5$ donne, quand nous remplaçons n successivement par 1, par 2, par 3, par 4, par 5, etc. :

−0.5 2.5 3.5 2.5 −0.5 −5.5 −12.5 etc.

Les termes peuvent être notés respectivement :

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 etc.

Autrement dit :

$x_1=-0.5$ $x_2=2.5$ $x_2=3.5$ etc.

Ou encore, sous forme de tableau :

n	1	2	3	4	5	6	7	...
x_n	−0.5	2.5	3.5	2.5	−0.5	−5.5	−12.5	...

Au rang 1, nous avons : −0.5 Au rang 2, nous avons : 2.5
Au rang 3, nous avons : 3.5 Au rang 4, nous avons : 2.5
Au rang 5, nous avons : −0.5 Au rang 6, nous avons : −5.5
Au rang 7, nous avons : −12.5 etc.

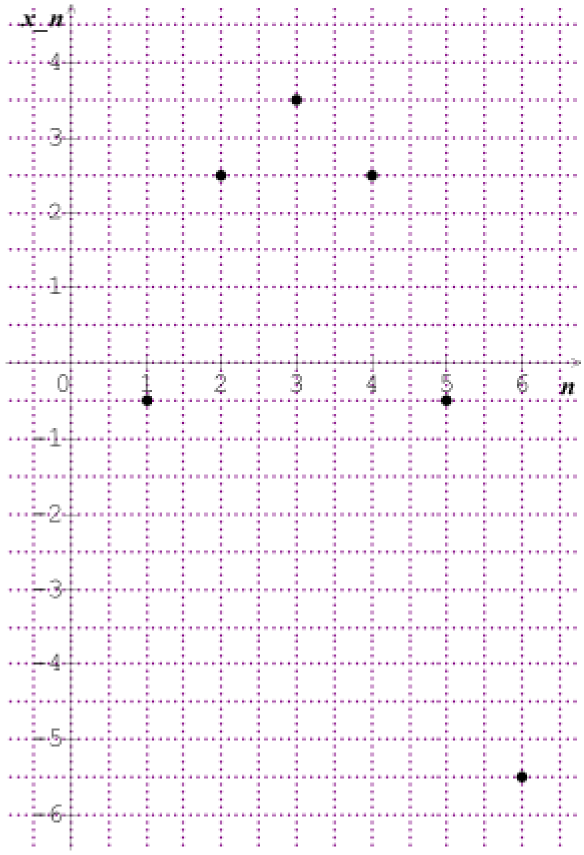
Inversement :

−0.5 se trouve aux rangs 1 et 5
2.5 se trouve aux rangs 2 et 4
3.5 se trouve au rang 3
−5.5 se trouve au rang 6
−12.5 se trouve au rang 7

Le terme général est $x_n=6n-n^2-5.5$

Une suite peut être <u>représentée graphiquement</u>.

Suite de l'exemple 1



Exercice 1 Soient les suites :

$u_n = 2n - 5$ $v_n = (n-1)^2 - n$ $w_n = \dfrac{149n + 2798}{n+2}$

$x_n = 1.2^n$ $y_n = \sqrt{n} + 31$ $z_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(2 - \dfrac{1}{10^n}\right)$

Pour chacune des suites données :

a) Calculer les cinq premiers termes et le terme de rang 10.

b) Chercher si le nombre 649 appartient ou non à la suite.
Si oui, préciser son rang ou ses rangs.

Exercice 2

Représenter graphiquement les premiers termes de la suite $u_n = 2n - 5$

Une suite u_n peut être construite <u>par récurrence</u>. Pour cela, il faut avoir à disposition une <u>condition initiale</u>, c'est-à-dire un ou plusieurs termes des premiers rangs ;
et une <u>relation de récurrence</u>, c'est-à-dire une formule qui exprime u_n en fonction d'un ou plusieurs termes précédents.

<u>Exemple 2</u>

Condition initiale : $u_1=4$
Relation de récurrence : $u_n=\sqrt{u_{n-1}}+3n$ (pour $n>1$)

Calculons les premiers termes après u_1

$$\begin{aligned}
u_2&=\sqrt{u_{2-1}}+3\cdot 2=\sqrt{u_1}+6=\sqrt{4}+6=8\\
u_3&=\sqrt{u_{3-1}}+3\cdot 3=\sqrt{u_2}+9=\sqrt{8}+9=11.828\\
u_4&=\sqrt{u_{4-1}}+3\cdot 4=\sqrt{u_3}+12=\sqrt{11.828}+12=15.439
\end{aligned}$$

<u>Exemple 3</u>

Condition initiale : $v_1=0$ et $v_2=4$
Relation de récurrence : $v_n=\dfrac{n}{n+3}+5v_{n-1}-7v_{n-2}$ (pour $n>2$)

Calculons les premiers termes après v_1 et v_2

$$\begin{aligned}
v_3&=\frac{3}{3+3}+5v_{3-1}-7v_{3-2}=\frac{3}{6}+5v_2-7v_1=1/2+5\cdot 4-7\cdot 0=20.5\\
v_4&=\frac{4}{4+3}+5v_{4-1}-7v_{4-2}=\frac{4}{7}+5v_3-7v_2=4/7+5\cdot 20.5-7\cdot 4=75.071\\
v_5&=\frac{5}{5+3}+5v_{5-1}-7v_{5-2}=\frac{5}{8}+5v_4-7v_3=5/8+5\cdot 75.071-7\cdot 20.5=232.482
\end{aligned}$$

<u>Exercice 3</u> Calculer tous les termes jusqu'à celui de rang 5

a) Condition initiale : $x_1=4$ Relation de récurrence : $x_n=\dfrac{-(n+1)^2}{x_{n-1}}$

b) Condition initiale : $y_1=5$ Relation de récurrence : $y_n=y_{n-1}+(-1)^n\cdot 3$

<u>Exercice 4</u> *Suite chaotique*

Considérons la relation de récurrence : $z_n=3.9\cdot z_{n-1}\cdot(1-z_{n-1})$

a) Calculer z_{10} avec la condition initiale $z_1=0.100$

b) Calculer z_{10} avec la condition initiale $z_1=0.101$

Exercice 5 *Nombre d'or*

Calculer tous les termes jusqu'à celui de rang 12

a) Condition initiale : $u_1=2$ Relation de récurrence : $u_n=1+\dfrac{1}{u_{n-1}}$

b) Condition initiale : $v_1=2$ Relation de récurrence : $v_n=\sqrt{1+v_{n-1}}$

Exercice 6 Calculer tous les termes jusqu'à celui de rang 5

a) Condition initiale : $u_1=4$ et $u_2=13$

Relation de récurrence : $u_n=\dfrac{u_{n-2}}{n+2}+\dfrac{u_{n-1}}{n+1}$

b) Condition initiale : $v_1=5$ et $v_2=-7$

Relation de récurrence : $v_n=\dfrac{v_{n-1}}{2v_{n-2}}+\dfrac{n}{v_{n-1}}+3$

*

Dans certains cas, il est possible de trouver une formule explicite pour le terme général d'une suite donnée par récurrence.

Exemple 4

Condition initiale : $x_1=11$ Relation de récurrence : $x_n=x_{n-1}+2n+9$

Calculons quelques termes : 11 24 39 56 75 96

Nous pouvons observer que :	11 = 10 + 1	24 = 20 + 4	39 = 30 + 9
	56 = 40 + 16	75 = 50 + 25	96 = 60 + 36

Cela suggère la formule suivante pour le terme général : $x_n=10n+n^2$

Cette formule est-elle la bonne ? Pour le savoir, exprimons d'abord x_{n-1} en se basant sur cette formule :

$$x_{n-1}=10(n-1)+(n-1)^2=10n-10+n^2-2\mathrm{n}+1=n^2+8n-9$$

Remplaçons x_{n-1} par cette expression dans le membre de droite de la relation de récurrence :

$$x_{n-1}+2n+9=n^2+8n-9+2n+9=n^2+10n=x_n$$

La relation de récurrence est respectée avec cette formule pour le terme général. Donc cette formule est correcte.

Exemple 5

N'allons pas croire qu'une formule devinée soit nécessairement juste !

Condition initiale : $y_1=2$

Relation de récurrence : $y_n=2(y_{n-1}+1)+\frac{\sqrt{(1000.5-n)^2}}{n-1000.5}y_{n-1}$

Les premiers termes donnent : 2 4 6 8 10 12 14 16

Nous nous disons : « C'est la succession des nombres pairs ! »

Et nous écrivons joyeusement la formule : $y_n=2n$

Eh bien, ce n'est pas juste !

Cette formule fonctionne jusqu'au terme de rang 1000 : $y_{1000}=2000$

Mais : $y_{1001}=2(y_{1000}+1)+\frac{\sqrt{(1000.5-1001)^2}}{1001-1000.5}y_{1000}=2(2000+1)+2000=6002$

Or 6002 n'est pas le double de 1001...

Exercice 7

Condition initiale : $u_1=5$ Relation de récurrence : $u_n=3u_{n-1}+2$

Cette suite a-t-elle pour terme général : $u_n=2\cdot 3^n-1$?

Exercice 8

Condition initiale : $u_1=1$ Relation de récurrence : $u_n=2u_{n-1}+3$

Cette suite a-t-elle pour terme général : $u_n=2^{n+1}-3$?

Exercice 9

Condition initiale : $u_1=14$ et $u_2=88$
Relation de récurrence : $u_n=7u_{n-1}-10u_{n-2}$

Cette suite a-t-elle pour terme général : $u_n=4\cdot 5^n-3\cdot 2^n$?

Suites alternées

Soit une suite u_n à termes positifs. Alors $v_n = (-1)^n u_n$ et $w_n = (-1)^{n+1} u_n$ sont des suites où les signes alternent.
v_n commence par un nombre négatif
w_n commence par un nombre positif

Exemple 6

$u_n = 2n$ donne :	2	4	6	8	10	etc.
$v_n = (-1)^n 2n$ donne :	−2	4	−6	8	−10	etc.
$w_n = (-1)^{n+1} 2n$ donne :	2	−4	6	−8	10	etc.

Remarques

Pour qu'il y ait alternance des signes, il est essentiel que les termes de u_n soient tous positifs.

Et une suite peut être alternée sans avoir un facteur $(-1)^n$ ou $(-1)^{n+1}$

Exemple 7

$u_n = \dfrac{35n^3 - 249n^2 + 532n - 330}{6}$ donne :	−2	3	−5	9	80	etc.
$v_n = (-1)^n u_n$ donne :	2	3	5	9	−80	etc.
$w_n = (-1)^{n+1} u_n$ donne :	−2	−3	−5	−9	80	etc.

Aucune de ces suites n'est alternée.

Exemple 8

$u_n = \sin\left(\dfrac{60°}{n} + n \cdot 180°\right)$ est une suite alternée. Sur le cercle trigonométrique, $\dfrac{60°}{n}$ est toujours situé dans le premier quadrant. En ajoutant des multiples de 180°, on fait alternativement passer l'angle du 1er au 3^{e} quadrant et inversement, donc le sinus change de signe à chaque fois.

Exercice 10

Trouver une formule pour chacune de ces suites dont les premiers termes sont donnés.

a)	$\sqrt{1}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$
b)	−1	4	−9	16	−25
c)	3	−4	5	−6	7
d)	−5	5	−5	5	−5
e)	−10	100	−1'000	10'000	−100'000
f)	0.1	−0.01	0.001	−0.0001	0.00001

Exercice 11

Trouver une formule pour une suite alternée dont le terme de rang 734 soit −735.

*

Quotient de deux suites

À partir de deux suites p_n et q_n, nous pouvons former la suite : $x_n = \frac{p_n}{q_n}$

Exemple 9

$p_n = n^2$	donne :	1	4	9	16	25	etc.
$q_n = 2n$	donne :	2	4	6	8	10	etc.
$x_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{n^2}{2n}$	donne :	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{25}{10}$	etc.

qui peuvent être simplifiés en :

$x_n = \frac{n}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	etc.

Exercice 12

Trouver une formule pour chacune de ces suites dont les premiers termes sont donnés.

a) $\frac{10}{8}$ $\frac{100}{9}$ $\frac{1000}{10}$ $\frac{10000}{11}$ $\frac{100000}{12}$

b) $\frac{1}{4}$ $-\frac{4}{5}$ $\frac{9}{6}$ $-\frac{16}{7}$ $\frac{25}{8}$

c) $-\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $-\frac{8}{9}$ $\frac{16}{17}$ $-\frac{32}{33}$

*

Sommes et produits

$\sum_{k=p}^{q} u_k$ désigne la somme des termes d'une suite, depuis le rang p jusqu'au rang q

$\prod_{k=p}^{q} u_k$ désigne le produit des termes d'une suite, depuis le rang p jusqu'au rang q

Les symboles pour une somme et pour un produit sont des lettres grecques, respectivement Sigma majuscule et Pi majuscule.

Exemple 10

Soit $u_n=2n+3$

$$\sum_{k=10}^{13} u_k=\sum_{k=10}^{13}(2k+3)=(2\cdot 10+3)+(2\cdot 11+3)+(2\cdot 12+3)+(2\cdot 13+3)=23+25+27+29=104$$

$$\prod_{k=5}^{7} u_k=\prod_{k=5}^{7}(2k+3)=(2\cdot 5+3)\cdot(2\cdot 6+3)\cdot(2\cdot 7+3)=13\cdot 15\cdot 17=3315$$

Exercice 13 Calculer

a) $\sum_{k=7}^{10} 3k$ b) $\prod_{k=4}^{6} 5k$

c) $\sum_{j=5}^{7} \frac{(-1)^j}{3j^2-1}$ d) $\prod_{j=6}^{9} \frac{j^2}{2j+5}$

e) $\sum_{k=1}^{5} k$ f) $\prod_{k=1}^{5} k$

*

À partir d'une suite u_n , on peut construire les suites :

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$

Les premiers termes de S_n sont :

$S_1 = u_1$
$S_2 = u_1 + u_2$
$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$
$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

Les premiers termes de P_n sont :

$P_1 = u_1$
$P_2 = u_1 \cdot u_2$
$P_3 = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$
$P_4 = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4$

<u>Exemple 11</u>

Partons de $u_n = n$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} k$	$P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{n} k$
$S_1 = 1$ $S_2 = 1+2 = 3$ $S_3 = 1+2+3 = 6$ $S_4 = 1+2+3+4 = 10$ $S_5 = 1+2+3+4+5 = 15$	$P_1 = 1$ $P_2 = 1 \cdot 2 = 2$ $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Dans cet exemple,
S_n s'appelle un <u>nombre triangulaire</u>,
P_n s'appelle la <u>factorielle</u> de n, qui est généralement notée **n!**

Pourquoi S_n s'appelle-t-il un nombre triangulaire ? Simple :

☺	1 +	
☺ ☺	2 +	
☺ ☺ ☺	3 +	
☺ ☺ ☺ ☺	4 +	
☺ ☺ ☺ ☺ ☺	5 =	15

Cherchons une formule pour le centième nombre triangulaire.

Écrivons la somme deux fois, une fois à l'endroit, une fois à l'envers :

À l'endroit	1	+	2	+	3	+	...	+	98	+	99	+	100
À l'envers	100	+	99	+	98	+	...	+	3	+	2	+	1
Addition par colonnes	101		101		101		...		101		101		101

Donc deux fois S_{100} donne cent fois 101, c'est-à-dire :

$$2 \cdot S_{100} = 100 \cdot 101$$
$$S_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Plus généralement, nous obtenons la formule suivante pour un nombre triangulaire :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 14

Calculer : 6! 10! 15! 69! 70!

Exercice 15

381'501 est un nombre triangulaire. Quel est son rang ?

Exercice 16

Soit $u_n = 2n - 1$ la suite des nombres impairs : 1 3 5 7 9 etc.

Donner les 5 premiers termes de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et les 5 premiers termes de $P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$

*

Il est parfois possible de trouver une formule pour le terme général de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ ou

pour le terme général de $P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.

Exemple 12

Soit $u_n = 2n$ la suite des nombres impairs : 2 4 6 8 10 etc.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

$$\prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{n} 2k = (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot\ldots\cdot(2\cdot n) = 2^n \cdot n!$$

Exemple 13

Soit $v_n = 2n-1$ la suite des nombres impairs : 1 3 5 7 9 etc.

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2$$

$$\prod_{k=1}^{n} v_k = \prod_{k=1}^{n} (2k-1) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1) = \frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

Exercice 17

Compléter les phrases suivantes :

La somme des nombres pairs, depuis 2 jusqu'à ...., est égale à 160'400.

La somme des nombres impairs, depuis 1 jusqu'à ...., est égale à 485'809.

Exercice 18

Soit $w_n = 10^{2n-1}$

a) Calculer $\sum_{k=1}^{5} w_k$

b) Trouver une formule pour $\prod_{k=1}^{n} w_k$

2. Suites arithmétiques

Une suite est dite arithmétique quand elle est de la forme $x_n = b + a \cdot (n-1)$
(avec $a \neq 0$)

a s'appelle la raison de la suite

Dans une telle suite, la différence entre deux termes consécutifs est constante :
elle est égale à la raison.

Exemple 14 $x_n = 8 + 3 \cdot (n-1)$ donne : 8 11 14 17 20 etc.

Faisons les différences : $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, $x_4 - x_3$, etc.

suite	8		11		14		17		20
différences		3		3		3		3	

La différence de deux termes consécutifs est bien égale à la raison : 3

C'est d'ailleurs facile à prouver. Une telle différence peut s'écrire :

$$x_{n+1} - x_n = [8 + 3n] - [8 + 3(n-1)] = 8 + 3\mathrm{n} - 8 - 3n + 3 = 3$$

Exercice 19

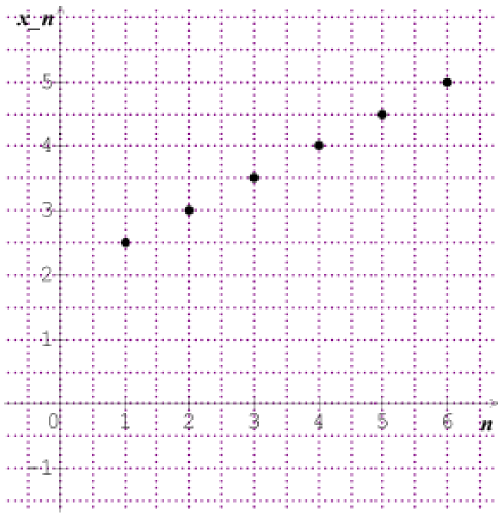
Chaque liste ci-dessous représente quatre termes consécutifs (pas nécessairement les premiers) d'une suite arithmétique. Calculer la raison de chacune, puis donner le terme suivant de la suite.

a)	6	11	16	21
b)	18	55	92	129
c)	88	75	62	49
d)	−161	−129	−97	−65
e)	−89	−112	−135	−158
f)	3	1	−1	−3
g)	4	13/3	14/3	5
h)	293/7	291/7	289/7	41
i)	18.2	20.9	23.6	26.3
j)	12	−6.4	−24.8	−43.2

Une suite arithmétique $x_n = b + a \cdot (n-1)$ peut aussi s'écrire $x_n = An + B$
avec $A = a$ et $B = b - a$

Le graphe d'une suite arithmétique est une succession de points situés sur une droite de pente A et d'ordonnée à l'origine B .

Exemple 15 Voici le graphe de $x_n = 2.5 + 0.5 \cdot (n-1) = 0.5n + 2$



*

Si nous connaissons la raison a et un terme quelconque x_p d'une suite arithmétique, alors nous pouvons calculer b au moyen de la formule : $b = x_p - a \cdot (p-1)$.

Nous avons vu que la raison est la différence entre deux termes consécutifs. Plus généralement, la raison peut être obtenue au moyen de la formule :

$$a = \frac{x_q - x_p}{q - p} \quad \text{(avec } q \neq p \text{)}$$

qui est la version, pour les suites, de la formule donnant la pente d'une droite à partir de deux points.

Exemple 16

Soit x_n une suite arithmétique dont les quatre premiers termes sont :
7 10 13 16

Que vaut x_{231} ? Et quel est le rang de 451 ?

La raison vaut $a=10-7=3$ et nous avons $b=7$

Donc $x_n=7+3(n-1)=3n+4$

Dès lors : $x_{231}=3\cdot231+4=697$

Et : $x_n=3n+4=451$ a pour solution : $n=\frac{451-4}{3}=149$. Le rang de 451 est 149

Exemple 17

Soit y_n une suite arithmétique dont nous connaissons $y_{37}=12$ et $y_{162}=58$

Que vaut y_{100} ? Et quel est le rang de 2.8 ?

La raison vaut $a=\frac{y_{162}-y_{37}}{162-37}=\frac{58-12}{162-37}=\frac{46}{125}=0.368$

b peut se calculer par exemple ainsi : $b=y_{37}-0.368\cdot(37-1)=12-0.368\cdot36=-1.248$

Donc $y_n=-1.248+0.368(n-1)=0.368n-1.616$

Dès lors : $y_{100}=0.368\cdot100-1.616=35.184$

Et : $y_n=0.368n-1.616=2.8$ a pour solution : $n=\frac{2.8+1.616}{0.368}=12$. Le rang de 2.8 est 12

Exercice 20

Soit u_n une suite arithmétique dont les quatre premiers termes sont :
100 83 66 49

Que vaut u_{412} ? Et quel est le rang de −937 ?

Exercice 21

Soit v_n une suite arithmétique dont les quatre premiers termes sont :

6.5 6.75 7 7.25

Que vaut v_{169} ? Et quel est le rang de 220 ?

Exercice 22

Soit w_n une suite arithmétique dont les quatre premiers termes sont :

−4.6 −7.8 −11 −14.2

Que vaut w_{294} ? Et quel est le rang de −1451 ?

Exercice 23

Soit x_n une suite arithmétique dont nous connaissons $x_{53}=885$ et $x_{139}=584$

Que vaut x_{916} ?

Exercice 24

Soit y_n une suite arithmétique dont nous connaissons $y_{119}=1$ et $y_{244}=1.65$

Que vaut y_{73} ?

Exercice 25

Soit u_n une suite fabriquée à partir d'une suite arithmétique, de manière à la rendre alternée. Les quatre premiers termes de u_n sont :

−21 33 −45 57

Trouver une formule pour le terme général.

Exercice 26

Soit v_n une suite fabriquée à partir d'une suite arithmétique, de manière à la rendre alternée. Les quatre premiers termes de v_n sont :

1.618 −2.155 2.692 −3.229

Trouver une formule pour le terme général.

Exercice 27

Soit w_n une suite fabriquée à partir de deux suites arithmétiques, l’une formant les numérateurs et l’autre les dénominateurs. Les quatre premiers termes de w_n sont :

$\frac{2}{5}$ $\frac{9}{11}$ $\frac{16}{17}$ $\frac{23}{23}$

Trouver une formule pour le terme général.

Exercice 28

Soit x_n une suite fabriquée à partir de deux suites arithmétiques, l’une formant les numérateurs et l’autre les dénominateurs. Les quatre premiers termes de x_n sont :

$\frac{99}{106}$ $\frac{112}{103}$ $\frac{125}{100}$ $\frac{138}{97}$

Trouver une formule pour le terme général.

Exercice 29

Soit y_n une suite fabriquée à partir de deux suites arithmétiques, l’une formant les numérateurs et l’autre les dénominateurs, et rendue alternée.
Les quatre premiers termes de y_n sont :

$\frac{3}{4}$ $-\frac{9}{16}$ $\frac{15}{28}$ $-\frac{21}{40}$

Trouver une formule pour le terme général.

*

Que vaut la somme des n premiers termes d’une suite arithmétique ?

Soit $u_n = A \cdot n + B$. Nous avons :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (A k + B) = A \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} B = A \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n B$$

Cette formule peut être simplifiée de deux manières :

$\boxed{S_n = \frac{A n^2 + (A + 2B) n}{2}}$ ♪ ou $\boxed{S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}}$ ♫

Exemple 18

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+8)=\frac{3n^2+(3+2\cdot 8)n}{2}=\frac{3n^2+19n}{2}$$

Exemple 19

Quelle est la somme des 58 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 4, sachant que le 1er terme vaut $u_1=12$?

Nous avons $u_n=b+a\cdot(n-1)$, avec $a=4$ et $b=12$

Calculons $u_{58}=12+4\cdot(58-1)=240$

La formule ♫ nous dit que : $S_{58}=\dfrac{58(12+240)}{2}=7308$

Exemple 20

Calculer 7 + 11 + 15 + ... + 247 + 251

Appelons u_n la suite arithmétique des termes dont nous voulons calculer la somme.

La raison vaut $a=u_2-u_1=11-7=4$ et nous avons $b=7$

Donc $u_n=b+a\cdot(n-1)=7+4\cdot(n-1)=4n+3$

Le rang de 251 est la solution de l'équation $4n+3=251$. On trouve $n=\dfrac{251-3}{4}=62$

La formule ♫ nous dit que : $S_{62}=\dfrac{62(7+251)}{2}=7998$

Si nous préférons utiliser la formule ♪, elle nous donne : $S_{62}=\dfrac{4\cdot 62^2+(4+2\cdot 3)\cdot 62}{2}=7998$

Exercice 30 Calculer

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-13)$

b) $\sum_{k=1}^{119}(-7k+4)$

c) $\sum_{k=1}^{62}(\frac{k}{4}+3)$

d) $\sum_{k=1}^{100}(\frac{7-3k}{5})$

e) La somme des 98 premiers termes d’une suite arithmétique de raison 2.5 et de premier terme égal à 14.

f) La somme des 119 premiers termes d’une suite arithmétique de raison −3 et de premier terme égal à 8.

g) La somme des 237 premiers termes d’une suite arithmétique de raison 0.45 et de premier terme égal à 6.35.

h) 18 + 23 + 28 + 33 + 38 + 43 + 48 + 53 + 58

i) 90 + 91 + 92 + ... + 149 + 150

j) 20 + 28 + 36 + ... + 404 + 402

k) 924 + 906 + 888 + ... − 2892 − 2910

l) −2.47 + 0.67 + 3.81 + ... + 289.55 + 292.69

m) La somme des 592 premiers termes d’une suite arithmétique dont le terme de rang 277 vaut 19 et dont le terme de rang 317 vaut 20.

Exercice 31

a) Trouver une formule pour le terme général d’une suite arithmétique
dont le terme de rang 82 vaut 606
et dont la somme des 423 premiers termes vaut 652’266.

b) Trouver une formule pour le terme général d’une suite arithmétique
dont la somme des 93 premiers termes vaut −15’159
et dont la somme des 257 premiers termes vaut −115’650

*

Et quelques problèmes sur les suites arithmétiques...

Exercice 32

Combien une pendule sonne-t-elle de coups en 24 heures si elle ne sonne que les heures ?

Exercice 33

La première marche qui donne accès à une église a une largeur de 20 mètres. Les autres diminuent régulièrement de 70 cm. La dernière a 8.10 mètres de largeur. Combien l'escalier a-t-il de marches ?

Exercice 34

Pour faire creuser un puits de 29 mètres de profondeur, on a donné à l'entrepreneur 300 francs pour le premier mètre, 450 francs pour le second, 600 francs pour le troisième, etc. Quelle somme totale lui a-t-on versée ?

Exercice 35

Dans une fête en plein air, on organise une course aux œufs. Sur la ligne de départ est disposé pour chaque concurrent un panier contenant 12 œufs. La compétition consiste à placer le plus rapidement possible chacun des œufs dans des coquetiers disposés de 5 mètres en 5 mètres, le premier coquetier se trouvant à 20 mètres de la ligne de départ. La règle du jeu interdit de prendre plus d'un œuf à la fois. Quelle distance totale doit parcourir chaque concurrent ?

Exercice 36

La bibliothèque de Babel comporte 886'114 livres au premier étage. Chaque fois qu'on monte d'un étage, le nombre de livres diminue de 999. Au dernier étage, il n'y a plus qu'un seul livre. Combien de livres en tout contient cette bibliothèque ? Précisons que le rez-de-chaussée, siège de l'administration, est dépourvu de livres.

Exercice 37 *Pour ceux qui aiment l'humour noir...*

La première année de son activité criminelle, un tueur en série bute 12 enfants. Puis il dégomme chaque année 46 mioches de plus que l'année précédente. Combien d'années lui sont nécessaires pour cumuler 19'024 victimes ?

3. Suites géométriques

Une suite est dite géométrique quand elle est de la forme $x_n = b \cdot a^{n-1}$
(avec $b \neq 0$, $a \neq 0$ et $a \neq 1$)

a s'appelle la raison de la suite

Dans une telle suite, le quotient de deux termes consécutifs est constant :
il est égal à la raison.

Exemple 21 $x_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ donne : 3 6 12 24 48 etc.

Faisons les quotients : $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_2}$, $\frac{x_4}{x_3}$, etc.

suite	3		6		12		24		48
quotients		2		2		2		2	

Le quotient de deux termes consécutifs est bien égal à la raison : 2

C'est d'ailleurs facile à prouver. Un tel quotient peut s'écrire :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = 2$$

Exercice 38

Chaque liste ci-dessous représente quatre termes consécutifs (pas nécessairement les premiers) d'une suite géométrique. Calculer la raison de chacune, puis donner le terme suivant de la suite.

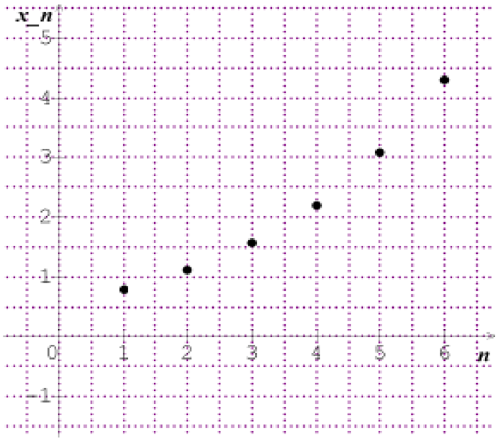
a)	6	60	600	6000
b)	432	144	48	16
c)	−15.75	−110.25	−771.75	−5'402.25
d)	728	−364	182	−91

Une suite géométrique $x_n = b \cdot a^{n-1}$ peut aussi s'écrire $x_n = B \cdot A^n$

avec $A = a$ et $B = \dfrac{b}{a}$

Le graphe d'une suite géométrique est une succession de points situés sur une exponentielle de base A et d'ordonnée à l'origine B .

<u>Exemple 22</u> Voici le graphe de $x_n = 0.8 \cdot 1.4^{n-1} = (\dfrac{4}{7}) \cdot 1.4^n$



*

Si nous connaissons la raison a et un terme quelconque x_p d'une suite géométrique, alors nous pouvons calculer b au moyen de la formule : $b = \dfrac{x_p}{a^{p-1}}$.

Nous avons vu que la raison est le quotient de deux termes consécutifs. Plus généralement, la raison peut être obtenue au moyen de la formule :

$$a = \sqrt[q-p]{\frac{x_q}{x_p}} \quad (\text{ avec } \quad q > p \ )$$

Exemple 23

Soit x_n une suite géométrique dont les quatre premiers termes sont :
50 60 72 86.4

Que vaut x_{21} ? Et quel est le rang de 35'440.09375 ?

La raison vaut $a=\frac{60}{50}=1.2$ et nous avons $b=50$.

Donc $x_n=50\cdot 1.2^{n-1}$

Dès lors : $x_{21}=50\cdot 1.2^{20}=1'916.88$

Et : $x_n=50\cdot 1.2^{n-1}=35'440.09375$ donne $1.2^{n-1}=\frac{35'440.09375}{50}=708.8019$, d'où
$n-1=\log_{1.2}(708.8019)=\frac{\log(708.8019)}{\log(1.2)}=36$. Le rang de 35'440.09375 est 37

Exemple 24

Soit y_n une suite géométrique dont nous connaissons $y_{24}=5$ et $y_{41}=3$

Que vaut y_{100} ? Et quel est le rang de 2.03 ?

La raison vaut $a=\sqrt[41-24]{\frac{y_{41}}{y_{24}}}=\sqrt[17]{\frac{3}{5}}=0.9704$

b peut se calculer par exemple ainsi : $b=\frac{y_{24}}{0.9704^{23}}=\frac{5}{0.9704^{23}}=9.9793$

Donc $y_n=9.9793\cdot 0.9704^{n-1}$

Dès lors : $y_{100}=9.9793\cdot 0.9704^{100-1}=0.5096$

Et : $y_n=9.9793\cdot 0.9704^{n-1}=2.03$ donne $0.9704^{n-1}=\frac{2.03}{9.9793}=0.2034$, d'où
$n-1=\log_{0.9704}(0.2034)=\frac{\log(0.2034)}{\log(0.9704)}=53$. Le rang de 2.03 est 54

Exercice 39

Soit u_n une suite géométrique dont les quatre premiers termes sont :
0.07 0.14 0.28 0.56

Que vaut u_{16} ? Et quel est le rang de 4’697’620.48 ?

Exercice 40

Soit v_n une suite géométrique dont les quatre premiers termes sont :
1000 200 40 8

Que vaut v_{18} ? Et quel est le rang de $\frac{8}{48'828'125}$?

Exercice 41

Soit w_n une suite géométrique dont nous connaissons
$w_{21}=0.75$ et $w_{26}=-0.0234375$

Que vaut w_{50} ?

Exercice 42

Soit x_n une suite fabriquée à partir de deux suites, l’une arithmétique ou géométrique formant les numérateurs et l’autre arithmétique ou géométrique formant les dénominateurs. Les quatre premiers termes de x_n sont :

$\frac{3}{7}$ $\frac{11}{91}$ $\frac{19}{1183}$ $\frac{27}{15379}$

Trouver une formule pour le terme général.

Exercice 43

Soit y_n une suite fabriquée à partir de deux suites, l’une arithmétique ou géométrique formant les numérateurs et l’autre arithmétique ou géométrique formant les dénominateurs. Les quatre premiers termes de y_n sont :

$\frac{4}{2}$ $\frac{-12}{-3}$ $\frac{36}{-8}$ $\frac{-108}{-13}$

Trouver une formule pour le terme général.

Remarque : si les fractions avaient été simplifiées en 2, 4, −9/2 et 108/13, la recherche du terme général serait nettement plus difficile...

Exercice 44

Soit z_n une suite fabriquée à partir de deux suites, l'une arithmétique ou géométrique formant les numérateurs et l'autre arithmétique ou géométrique formant les dénominateurs, et rendue alternée. Les quatre premiers termes de z_n sont :

$-\frac{17}{19}$ $\frac{40}{76}$ $-\frac{63}{304}$ $\frac{86}{1216}$

Trouver une formule pour le terme général.

Exercice 45

Soient la suite arithmétique $u_n = 9n + 16$ et la suite géométrique $v_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

a) le nombre 472'148 est-il un terme de la première suite ?

b) le nombre 472'148 est-il un terme de la deuxième suite ?

Que vaut la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ?

Soit $u_n = b \cdot a^{n-1}$. Nous avons :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (b \cdot a^{k-1}) = b \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} = \frac{b}{1-a} \sum_{k=1}^{n} (1-a) a^{k-1} = \frac{b}{1-a} \sum_{k=1}^{n} (a^{k-1} - a^k)$$
$$= \frac{b}{1-a}((a^0 - a^1) + (a^1 - a^2) + (a^2 - a^3) + \ldots + (a^{n-1} - a^n)) = \frac{b}{1-a}(a^0 - a^n) = \frac{b(1-a^n)}{1-a}$$

En résumé :

$$\boxed{S_n = \frac{b(1-a^n)}{1-a}}$$

Exemple 25

$$\sum_{k=1}^{n} 4 \cdot 3^{k-1} = \frac{4(1-3^n)}{1-3} = \frac{4(1-3^n)}{-2} = -2(1-3^n) = 2(3^n - 1)$$

Exemple 26

$$\sum_{k=1}^{10} 7 \cdot 0.5^{k-1} = \frac{7(1-0.5^{10})}{1-0.5} = \frac{7(1-0.5^{10})}{0.5} = 14(1-0.5^{10}) = 13.9863$$

Exemple 27

Calculer $8 + 12 + 18 + \ldots + \frac{59'049}{128} + \frac{177'147}{256}$

La raison vaut $a = \frac{12}{8} = 1.5$ et nous avons $b = 8$.

Il reste à trouver le rang de $\frac{177'147}{256}$.

Il faut résoudre l'équation $8 \cdot 1.5^{n-1} = \frac{177'147}{256}$. Cela donne :

$$1.5^{n-1} = \frac{177'147}{256} / 8 = \frac{177'147}{2048} \text{ , d'où } n-1 = \log_{1.5}\left(\frac{177'147}{2048}\right) = \frac{\log\left(\frac{177'147}{2048}\right)}{\log(1.5)} = 11$$

Ainsi $n = 12$

Et donc $8 + 12 + 18 + \ldots + \frac{59'049}{128} + \frac{177'147}{256} = \frac{8(1-1.5^{12})}{1-1.5} = 2'059.9414$

Exercice 46 Calculer

a) $\sum_{k=1}^{n} 20 \cdot 6^{k-1}$

b) $\sum_{k=1}^{567} 3 \cdot (-1)^{k-1}$

c) La somme des 9 premiers termes d'une suite géométrique de raison 10 et de premier terme égal à 6.

d) La somme des 9 premiers termes d'une suite géométrique de raison 0.1 et de premier terme égal à 8.

e) $7+14+28+...+117'440'512+234'881'024$

f) $25+10+4+...+\frac{32'768}{1'220'703'125}+\frac{65'536}{6'103'515'625}$

g) $1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+...+\frac{1}{7^{58}}+\frac{1}{7^{59}}$

h) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{16'384}+\frac{1}{32'768}$

Exercice 47

Considérons la formule $\sum_{k=1}^{n} b \cdot a^{k-1} = \frac{b(1-a^n)}{1-a}$. Supposons $|a|<1$

En pareil cas, si n → ∞, alors a^n → 0. Et la formule devient une somme infinie :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b \cdot a^{k-1} = \frac{b}{1-a}$$

Appliquer cette formule au calcul de :

a) $1+0.2+0.2^2+0.2^3+...$

b) $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+...$

c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$

d) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...$

e) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...$

Et quelques problèmes sur les suites géométriques...

Exercice 48

Le roi du Katanga,
pour divertir les masses,
fait empaler six gars
sur une grande place.
Puis, touché par l'amour
de son peuple complice,
il double chaque jour
le nombre de supplices.
À vous de calculer
le nombre cumulé
de pauvres empalés
au bout de trois semaines !
Donnez-vous de la peine !

Exercice 49

Chaque fois qu'il reçoit un coup de marteau sur la tête, Max perd 2 % des illusions qu'il lui reste. Sachant qu'il avait 50'000 illusions avant d'être frappé une première fois, combien d'illusions conserve-t-il après 46 coups de marteau sur le crâne ?

Exercice 50

Sur une île déserte, Robinson dispose de 6 tonneaux contenant chacun 50 litres de rhum. Robinson boit chaque jour 0.4 % de la quantité de rhum qu'il reste à son réveil. Combien de litres de rhum reste-t-il au bout de 365 jours (en négligeant l'évaporation) ?

Exercice 51

Dans un cercle de rayon 1, on inscrit un carré. Dans ce carré, on inscrit un cercle ; dans celui-ci, on inscrit un nouveau carré, et ainsi de suite. En appliquant ce procédé à l'infini, calculer à l'aide de la formule donnée à l'exercice 47 :

a) la somme infinie des aires des cercles

b) la somme infinie des aires des carrés

4. Suites quadratiques

Une suite est dite quadratique quand elle est de la forme $x_n = c + b \cdot (n-1) + a \cdot (n-1)(n-2)$ (avec $a \neq 0$)

Dans une telle suite :

c est le premier terme
b est la différence des deux premiers termes
a est le double de toute différence de deux résultats consécutifs d'une différence de deux termes consécutifs (je sais : cette phrase n'est pas facile à comprendre...)

D'autre part, une suite quadratique peut aussi s'écrire $x_n = A n^2 + B n + C$
avec $A = a$
$B = b - 3a$
$C = c - b + 2\text{a}$

Exemple 28

$x_n = 5 + 3(n-1) + 7(n-1)(n-2) = 7n^2 - 18n + 16$ donne :

5 8 25 56 101 160 etc.

Récrivons cette liste ; puis, en-dessous, les différences ; et, encore en-dessous, les différences des différences :

suite	5		8		25		56		101		160
diff		3		17		31		45		59	
diff de diff			14		14		14		14		

Sur la diagonale de gauche, nous avons successivement c = 5, b = 3 et 2a = 14.

Exemple 29

Trouver une formule pour le terme général d'une suite quadratique x_n dont les quatre premiers termes sont : 4 13 48 109

Faisons les différences et les différences de différences :

suite	4		13		48		109
diff		9		35		61	
diff de diff			26		26		

Nous avons c = 4, b = 9 et 2a = 26, c-à-d a = 13. Donc :

$x_n = 4 + 9(n-1) + 13(n-1)(n-2) = 13n^2 - 30n + 21$

<u>Exemple 30</u>

Dans le cas particulier où $x_n = c + n^2$, les différences sont tout simplement les nombres impairs à partir de 3 :

suite	c + 1		c + 4		c + 9		c + 16
diff		3		5		7	
diff de diff			2		2		

*

À titre d'information (nous n'allons pas l'utiliser), voici la formule pour la somme d'une suite quadratique :

Soit $u_n = A n^2 + B n + C$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$. Alors :

$$\boxed{S_n = \frac{n}{6}[2 A n^2 + (3 A + 3 B) n + A + 3 B + 6 C] = \frac{n}{6}[2 a n^2 + (3 b - 6 a) n + 4 a - 3 b + 6 c]}$$

*

<u>Exercice 52</u> Donner une formule pour le terme général de chacune des suites quadratiques ci-dessous, dont les quatre premiers termes sont donnés.

a)	−4	1	12	29
b)	23	5	−17	−43
c)	5	8	13	20
d)	−1	2	7	14
e)	−19	−16	−11	−4
f)	107	110	115	122

5. Le problème de l'induction

Pour chacune des suites ci-dessous, quel est le dixième terme ?

a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b)	2	4	6	8	10	12	14	16	18
c)	7	10	13	16	19	22	25	28	31

Vous avez probablement répondu :

a) 10

b) 20

c) 34

Pourquoi pas ? Mais aurions-nous pu répondre :

a) 74

b) 37

c) 100

Tout à fait ! Voulez-vous des formules qui correspondent à ces réponses ? En voici :

a) $n+\frac{64}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$

b) $2n+\frac{17}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$

c) $3n+4+\frac{66}{9!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$

De même, si je veux une formule vérifiant les conditions suivantes :

$u_n=n^2$ pour n variant de 1 à 999 et $u_{1000}=1'000'273$,

je peux choisir : $u_n=n^2+\frac{273}{999!}\prod_{k=1}^{999}(n-k)$

Voulons-nous une formule qui donne
les termes d'une suite arithmétique jusqu'au rang 999'999'999,
puis les termes d'une suite géométrique à partir du rang 1'000'000'000 ?
C'est possible.

La suite :

$$v_n = 0.5\left[\left(1 - \frac{\sqrt{(n-10^9+0.5)^2}}{n-10^9+0.5}\right)(2n-1) + \left(1 + \frac{\sqrt{(n-10^9+0.5)^2}}{n-10^9+0.5}\right)10^{-n\cdot 10^{-8}}\right]$$

donne :

$2n-1$ pour n variant de 1 à 999'999'999 et $10^{-n\cdot 10^{-8}}$ pour n ≥ 1'000'000'000

Bref, elle donne les nombres impairs :

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 etc.

jusqu'à $v_{999'999'999} = 1'999'999'997$,

puis elle passe brusquement à :

$$v_{1'000'000'000} = 0.000'000'000'1$$

*

Est-il toujours possible de trouver une formule qui corresponde aux m premiers termes d'une suite, quelle que soit la valeur de m et quels que soient ces termes ?
La réponse est oui.

Une formule de Newton (dite d'interpolation polynomiale) permet de généraliser le procédé vu pour les suites quadratiques. Examinons cette formule sur un exemple.

Exemple 31

À partir d'une suite dont nous connaissons les six premiers termes, construisons les différences, puis les différences de différences, puis les différences de différences de différences, etc.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
11	21	55	125	243	421

10 34 70 118 178

24 36 48 60

12 12 12

0 0

0

Posons : $\alpha_0 = u_1 = 11$

α_1 = 1er nombre de la 1re ligne de différences = 10

α_2 = 1er nombre de la 2e ligne de différences = 24

α_3 = 1er nombre de la 3e ligne de différences = 12

etc.

La formule :

$$u_n=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{1!}(n-1)+\frac{\alpha_2}{2!}(n-1)(n-2)+\frac{\alpha_3}{3!}(n-1)(n-2)(n-3)+\ldots \qquad \text{(avec } n \geq 1\text{)}$$

donne tous les termes du tableau.

Dans cet exemple, cette formule devient :

$$u_n=11+10(n-1)+\frac{24}{2}(n-1)(n-2)+\frac{12}{6}(n-1)(n-2)(n-3)=2n^3-4n+13$$

Si, maintenant, nous voulons prolonger la suite par un septième terme quelconque $u_7=T$, nous pouvons prendre la formule suivante :

$$u_n=2n^3-4n+13+\frac{(T-671)}{6!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$$

où 671 est la valeur de $2n^3-4n+13$ pour $n=7$.

Cela signifie que, si nous connaissons les m premiers termes d'une suite, il est possible de la prolonger n'importe comment et nous disposons d'une infinité de formules polynomiales pour le faire.

À un autre niveau, celui de l'épistémologie, nous pouvons dire que, pour rendre compte en science d'un nombre fini de données, il existe une infinité de modèles possibles.

C'est le problème de l'induction, étudié par des philosophes comme Sextus Empiricus, David Hume, Nelson Goodman, Karl Popper, Willard Van Orman Quine, etc.

(voir l'article Wikipédia sur « Le problème de l'induction »)

<u>Exercice 53</u>

Considérons une suite dont nous connaissons les cinq premiers termes. Trouver une formule donnant ces cinq termes et permettant de prolonger la suite par n'importe quel nombre T au sixième rang.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
2	7	5	−1	10

*

La réalité scolaire fait que vous serez peut-être amenés dans un examen à devoir résoudre des tâches telles que :

Soit la suite u_n dont les 5 premiers termes sont :

7 −10 13 −16 19

Trouver une formule pour le terme général de cette suite.

Nous venons de voir qu'il y a une infinité de réponses possibles. Mais, dans le cadre scolaire qui est le nôtre, il est attendu de vous une exploration restreinte aux types de suites que nous avons étudiées, à savoir les suites arithmétiques, géométriques, quadratiques simples ($c+n^2$), avec la possibilité d'augmenter un peu la difficulté en jouant sur l'alternance des signes ou le quotient de deux suites.

Ainsi, dans la suite ci-dessus, le but n'est pas de procéder comme dans l'exercice 53, mais

- de constater d'abord une alternance de signes,
  qui peut être réalisée par le facteur $(-1)^{n+1}$;
- de constater ensuite que la différence de deux termes consécutifs
  (en faisant abstraction du signe) vaut 3 et que nous avons donc
  une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 7,
  ce qui est rendu par la formule : $7+3\cdot(n-1)=3n+4$;
- de réunir les deux formules pour obtenir : $u_n=(-1)^{n+1}(3n+4)$.

Exercice 54

Pour chacune des suites ci-dessous, dont sont donnés les cinq premiers termes, trouver une formule pour le terme général en restreignant l'exploration aux suites arithmétiques, géométriques, quadratiques simples ($c+n^2$), avec la possibilité de jouer sur l'alternance des signes ou le quotient de deux suites.

a)	4	12	36	108	324
b)	97	86	75	64	53
c)	-800	400	-200	100	-50
d)	243	81	27	9	3
e)	470	-450	430	-410	390
f)	-100	-97	-92	-85	-76
g)	-5	-1	3	7	11
h)	4	-7	12	-19	28
i)	1000	-1200	1440	-1728	2073.6
j)	-7	10	-15	22	-31
k)	-20	40	-80	160	-320
l)	-500	400	-300	200	-100
m)	$\frac{7}{14}$	$\frac{10}{23}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{22}{41}$	$\frac{31}{50}$
n)	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{32}{17}$	$\frac{64}{21}$
o)	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{30}$
p)	$\frac{14}{600}$	$\frac{17}{750}$	$\frac{20}{540}$	$\frac{23}{510}$	$\frac{26}{480}$
q)	$-\frac{6}{10}$	$\frac{9}{20}$	$-\frac{12}{40}$	$\frac{15}{80}$	$-\frac{18}{160}$
r)	$\frac{10}{4}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{13}{19}$	$\frac{14}{28}$

s)	$-\frac{75}{8}$	$\frac{70}{13}$	$-\frac{65}{18}$	$\frac{60}{23}$	$-\frac{55}{28}$
t)	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{125}{12}$	$\frac{625}{24}$
u)	$\frac{7}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{15}{3}$	$-\frac{22}{3}$	$\frac{31}{3}$
v)	$\frac{8}{3}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{22}{11}$	$\frac{29}{18}$	$\frac{36}{27}$
w)	$-\frac{5}{9}$	$\frac{8}{14}$	$-\frac{13}{19}$	$\frac{20}{24}$	-1