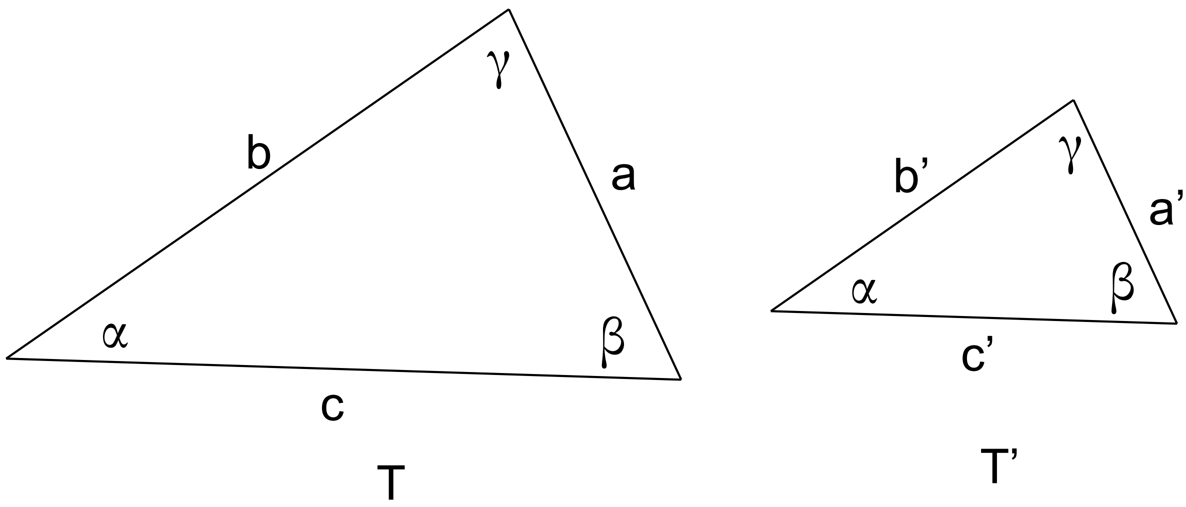
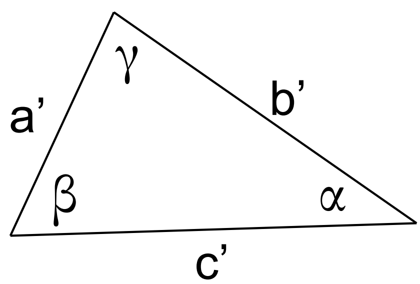
Triangles semblables

Deux triangles sont dits <u>semblables</u> quand ils ont les mêmes angles

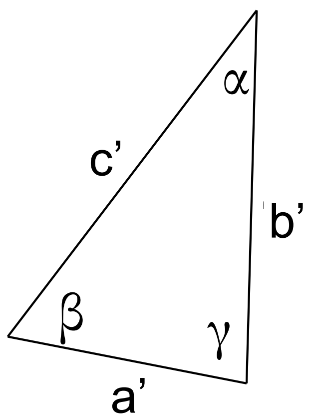
Soient deux triangles semblables T et T '



T ' peut aussi être retourné recto-verso :



Ou T ' peut subir une rotation :

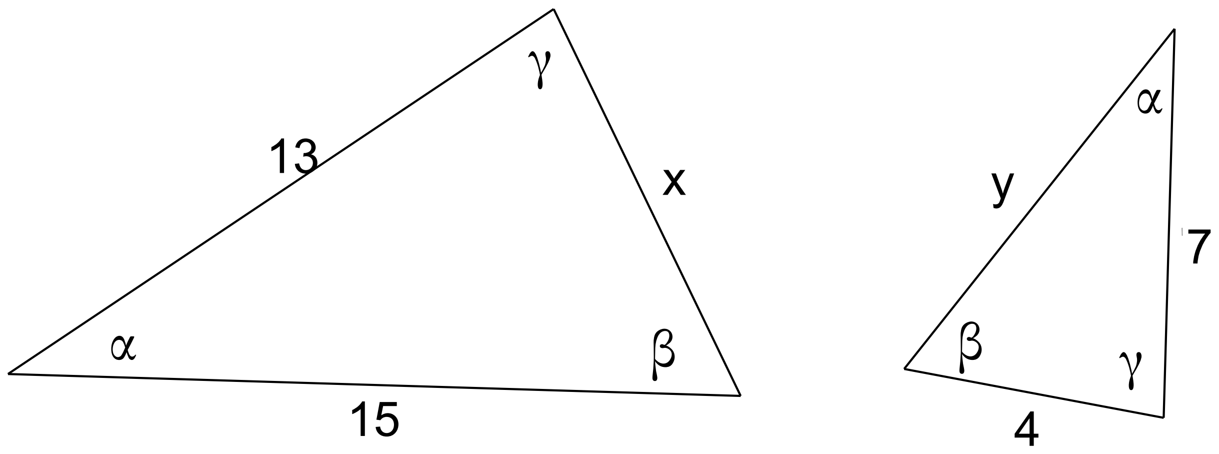


Le *théorème des triangles semblables* (parfois nommé *théorème de Thalès*) dit que les égalités suivantes sont vraies :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \qquad \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'} \qquad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$$

Exemple 1 : Calculer x et y



Utilisons d'abord : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ avec a = x, a' = 4, b = 13 et b' = 7, c'est-à-dire :

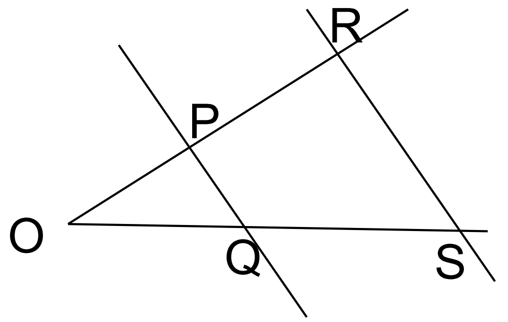
$\frac{x}{4}=\frac{13}{7}$ ce qui donne : $x=\frac{13\cdot 4}{7}\approx 7.43$

Ensuite, prenons : $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ avec b = 13, b' = 7, c = 15 et c' = y, c'est-à-dire :

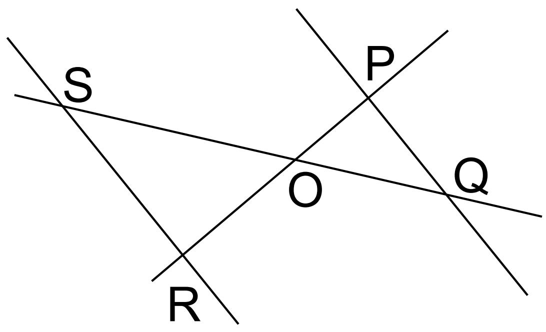
$\frac{13}{7}=\frac{15}{y}$ ce qui donne : $y=\frac{7\cdot 15}{13}\approx 8.08$

Si les unités ne sont pas indiquées sur le dessin, nous donnerons des réponses sans unités ; dans le cas contraire, des réponses avec unités.

Cas particulier 1



Cas particulier 2



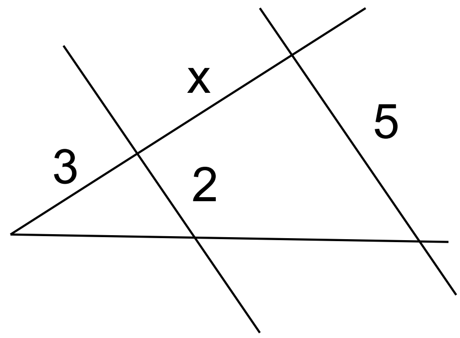
Dans ces deux cas particuliers, les segments PQ et RS sont parallèles, donc les triangles OPQ et ORS sont semblables.

En prenant : a = $\overline{OP}$, b = $\overline{OQ}$, c = $\overline{PQ}$, a' = $\overline{OR}$, b' = $\overline{OS}$ et c' = $\overline{RS}$,
le théorème des triangles semblables donne :

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}}=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OS}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}$$

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} \qquad \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{OR}}{\overline{RS}} \qquad \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{OS}}{\overline{RS}}$$

<u>Exemple 2</u> : Calculer x



$\overline{OP}$ = 3
$\overline{OR}$ = 3 + x
$\overline{PQ}$ = 2
$\overline{RS}$ = 5

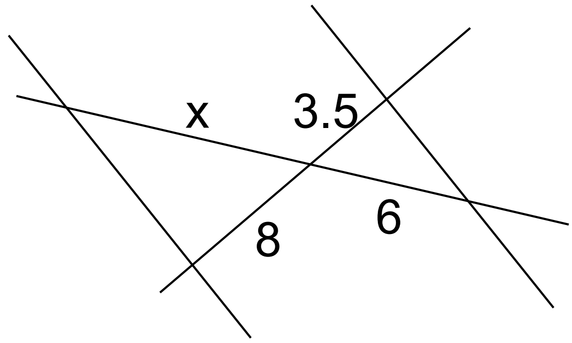
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}$$ donne :

$$\frac{3}{3+x}=\frac{2}{5}$$

Effectuons un produit en croix :

$(3+x)\cdot 2=3\cdot 5$ d'où $6+2x=15$ et finalement $x=\frac{15-6}{2}=4.5$

Exemple 3 : Calculer x



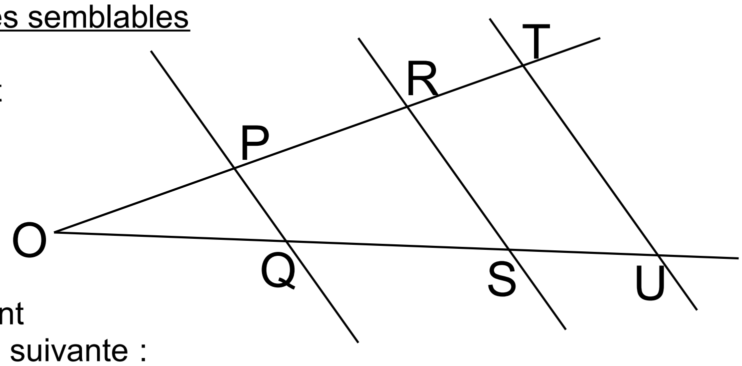
$\overline{OP} = 3.5$
$\overline{OQ} = 6$
$\overline{OS} = x$
$\overline{OR} = 8$

$\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}}=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OS}}$ donne : $\frac{3.5}{8}=\frac{6}{x}$

Effectuons un produit en croix :

$3.5\,x=6\cdot 8=48$ d'où $x=\frac{48}{3.5}\approx 13.71$

Corollaire du théorème des triangles semblables



Si les segments PQ, RS et TU sont parallèles, alors :

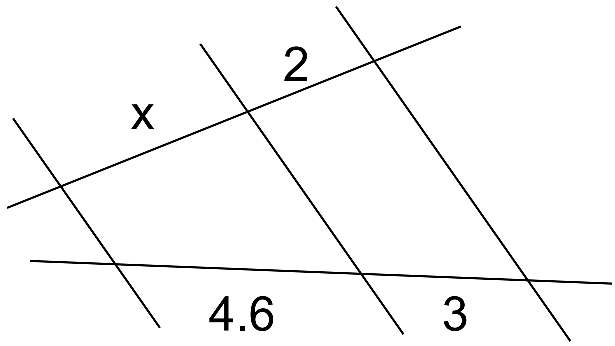
$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{PR}}{\overline{QS}}=\frac{\overline{RT}}{\overline{SU}}=\frac{\overline{PT}}{\overline{QU}}$

Ce corollaire se démontre facilement à partir de la propriété arithmétique suivante :

si $\frac{g}{h}$ est égal à $\frac{e}{f}$, alors $\frac{e+g}{f+h}$ et $\frac{e-g}{f-h}$ sont aussi égaux à $\frac{e}{f}$

(cette propriété se déduit du produit en croix et de la distributivité)

Exemple 4 : Calculer x



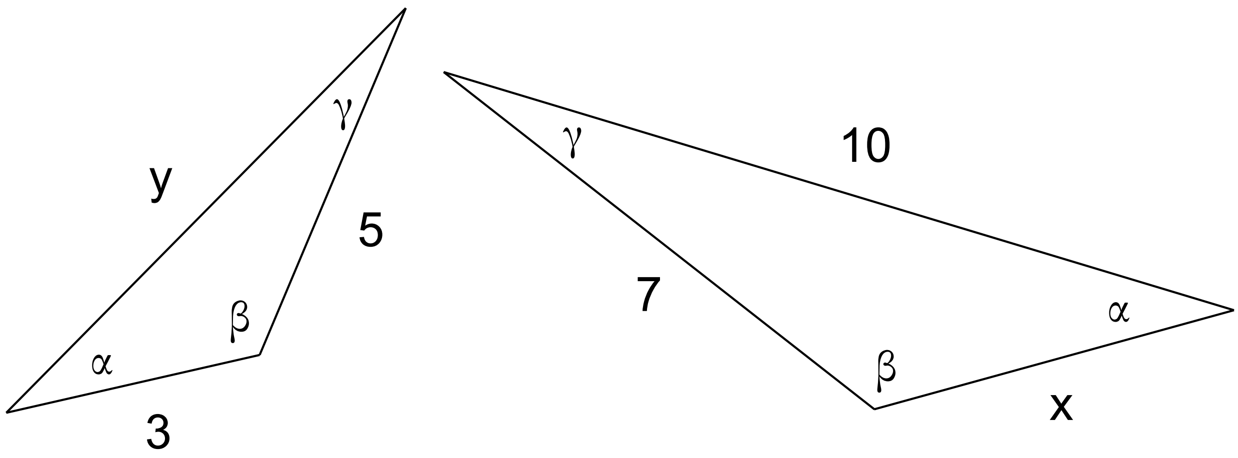
$\overline{PR} = x$
$\overline{QS} = 4.6$
$\overline{RT} = 2$
$\overline{SU} = 3$

$\frac{\overline{PR}}{\overline{QS}}=\frac{\overline{RT}}{\overline{SU}}$ donne : $\frac{x}{4.6}=\frac{2}{3}$

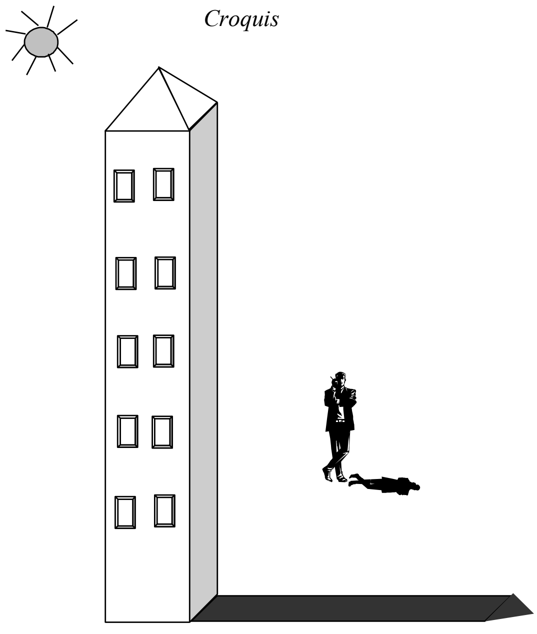
d'où $x=\frac{2\cdot 4.6}{3}=\frac{9.2}{3}\approx 3.07$

Exercice 1

Calculer x et y



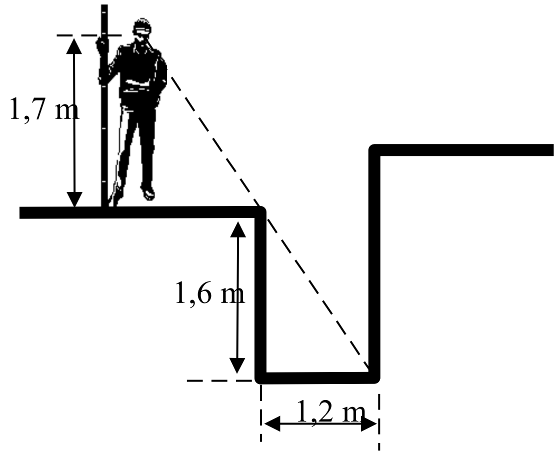
Exercice 2



Eustache mesure 1m80 et observe que son ombre au sol est de 1m60. L'ombre de l'immeuble est de 17 mètres.
La base de l'immeuble est carrée et mesure 6 m de côté.

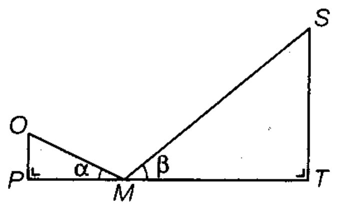
Quelle est la hauteur de cet immeuble en supposant que les rayons du soleil sont parallèles entre eux ?

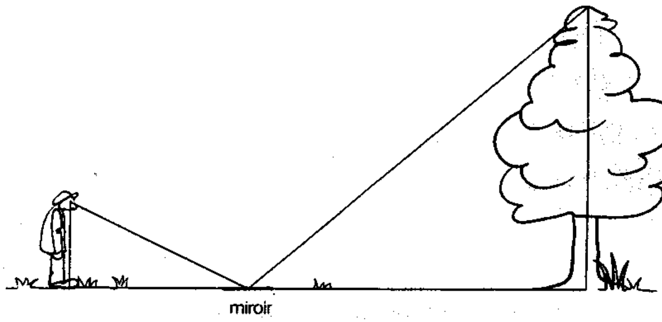
Exercice 3



À quelle distance horizontale du bord du puits se trouvent les pieds de ce personnage ?

Exercice 4



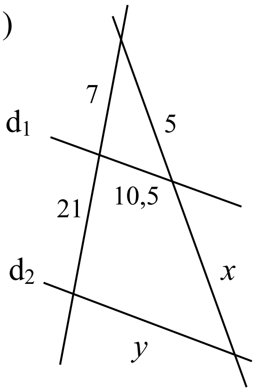


Sigismond a une technique pour mesurer la hauteur d'un arbre. Il pose un miroir sur le sol à une distance de 23 m de cet arbre. Il recule doucement pour voir parfaitement le reflet du sommet de l'arbre dans le miroir. Il se trouve alors à une distance de 2 mètres du miroir. Si son œil est à 1m75 du sol, quelle est la hauteur de l'arbre ? (N.B. En vertu de la loi de la réflexion : $\alpha = \beta$.)

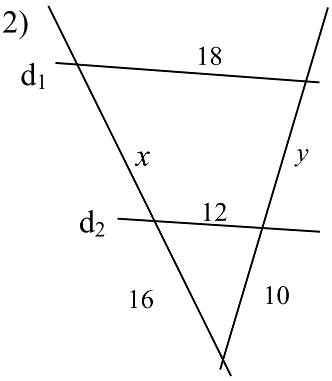
Exercice 5

On considère sur tous les croquis que $d_1 // d_2 // d_3$. Unités : cm
Calculer dans chaque cas les longueurs demandées.

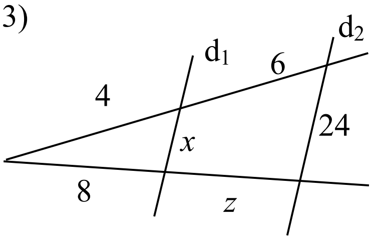
1)



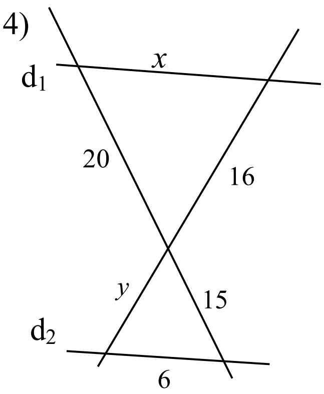
2)



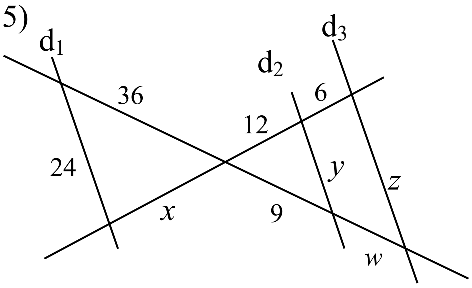
3)



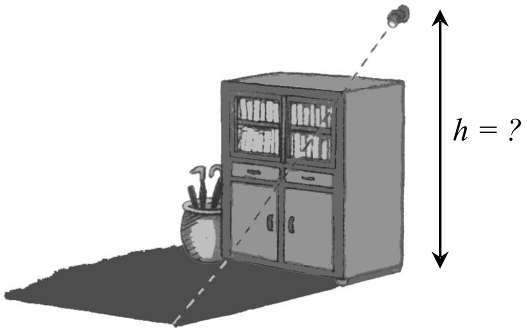
4)



5)



Exercice 6



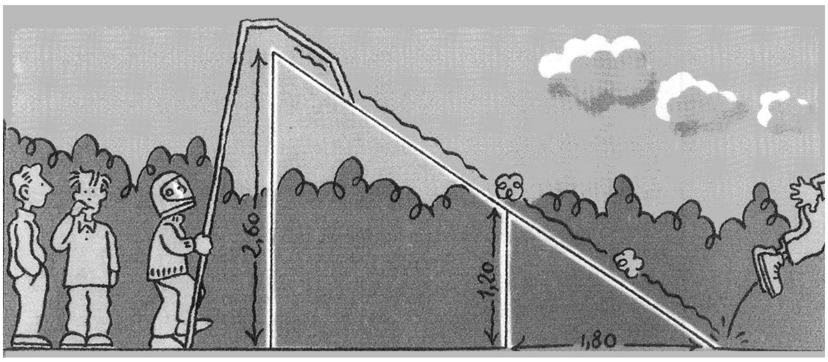
Au-dessus d'un meuble de 1,70 m de haut et de 75 cm de profond, on a placé un spot lumineux.

L'ombre du meuble s'étend sur 1,30 m.

À quelle hauteur est fixé ce spot ?

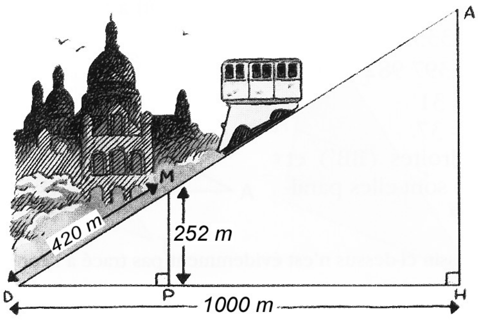
Exercice 7

Un toboggan rectiligne est porté par deux solides poteaux.
Le plus petit poteau mesure 1,20 m et il est placé à 1,80 m du point d'arrivée du toboggan.
Le plus grand mesure 2,60 m. Quelle est la longueur du toboggan ?



Exercice 8

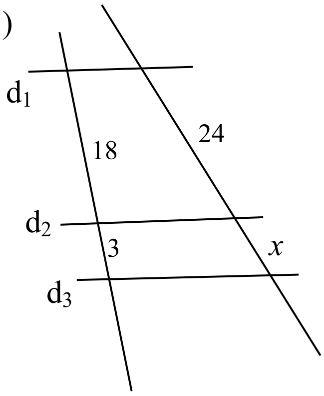
Un funiculaire part de D pour se rendre en A en suivant la droite DA. En utilisant les informations ci-dessous et sachant que le funiculaire se déplace à 30 km/h, calculer la durée du trajet DA.



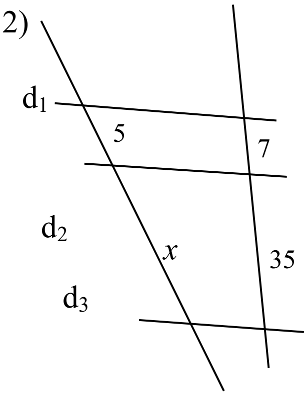
Exercice 9

On considère sur tous les croquis que $d_1 // d_2 // d_3 // d_4 // d_5$. Unités : cm
Calculer dans chaque cas les longueurs demandées.

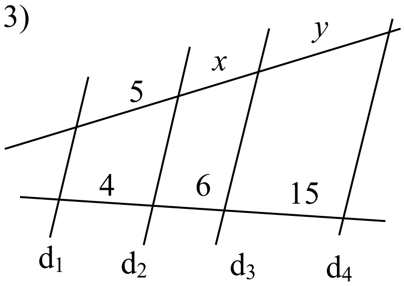
1)



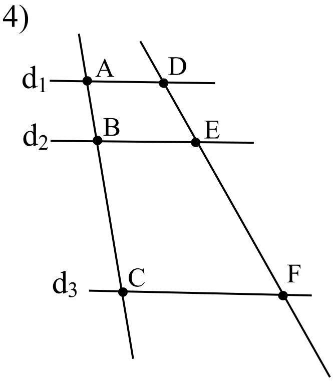
2)



3)



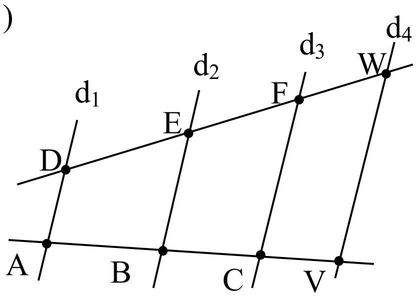
4)



$\overline{AB} = 7$
$\overline{BC} = 28$
$\overline{DE} = 5$

$\overline{EF} = ?$
$\overline{DF} = ?$

5)

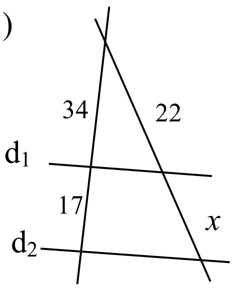


$\overline{AB} = 20$ $\overline{DE} = 18$ $\overline{BC} = ?$
$\overline{CV} = 25$ $\overline{EF} = 24$ $\overline{FW} = ?$

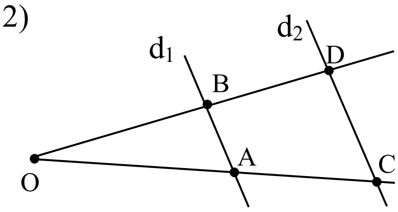
Exercice 10

On considère sur tous les croquis que $d_1 // d_2 // d_3 // d_4$. Unités : cm
Calculer dans chaque cas les longueurs demandées.

1)



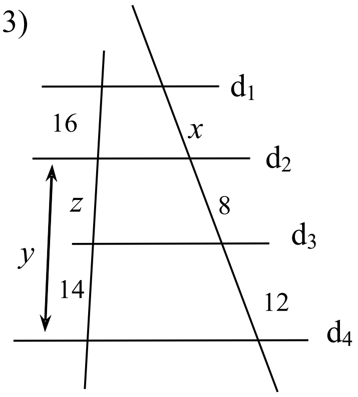
2)



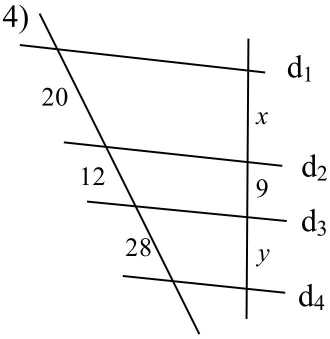
$\overline{OB} = 4$
$\overline{AB} = 5$
$\overline{CD} = 20$

$\overline{OD} = ?$

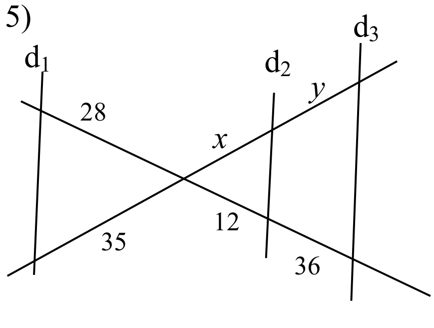
3)



4)



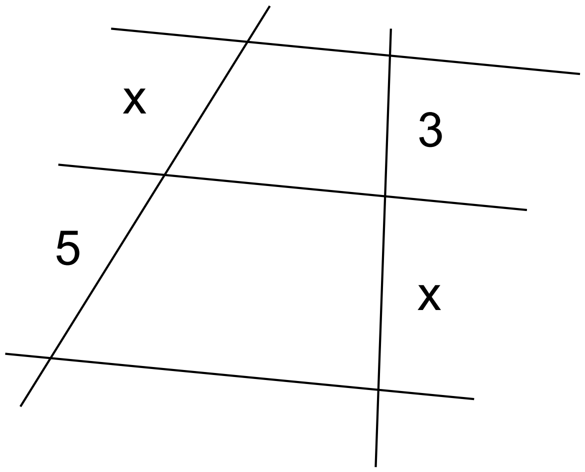
5)



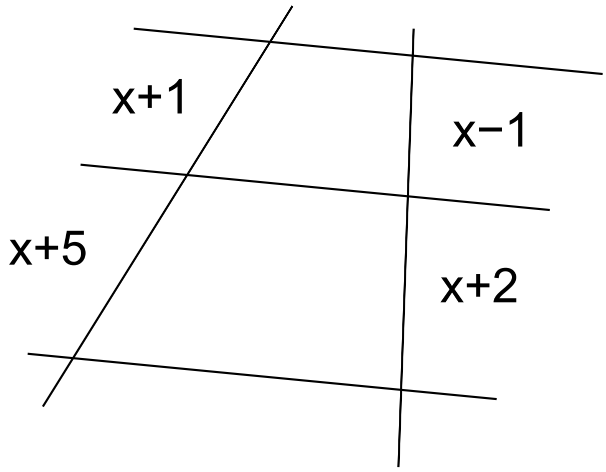
Exercice 11

À chaque fois, calculer x.

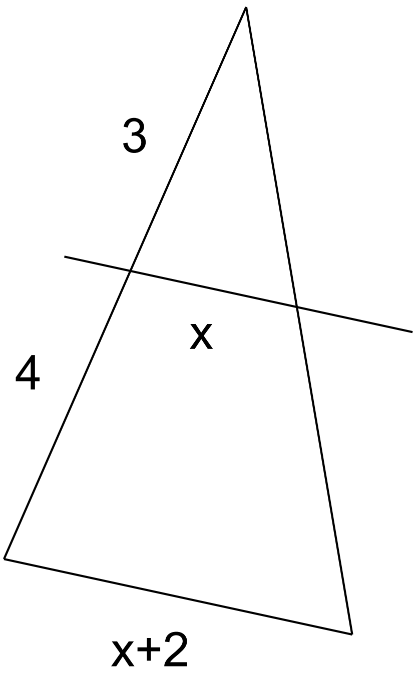
1)



2)

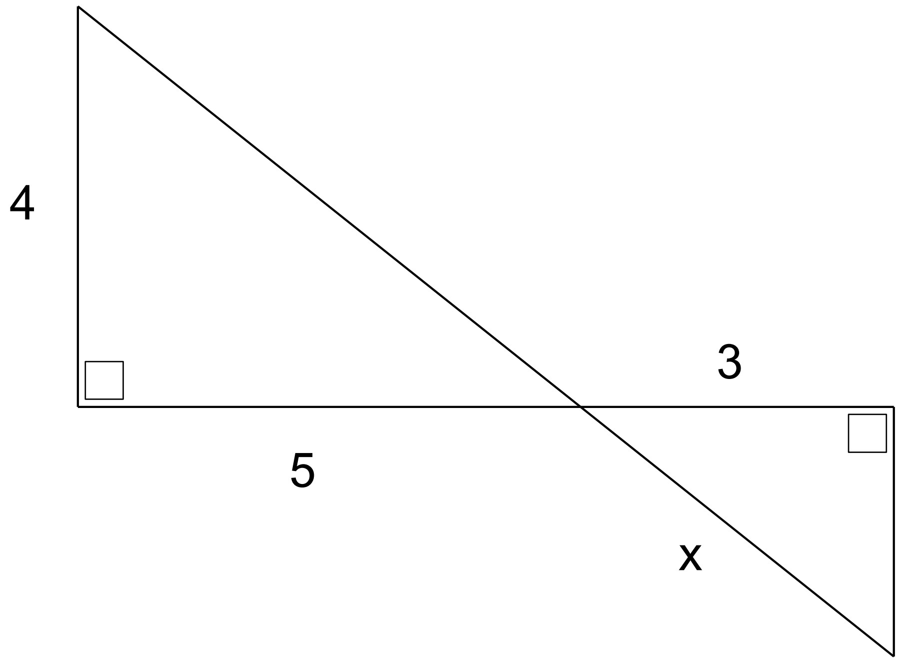


3)



Exercice 12

Calculer x



Exercice 13

Calculer x