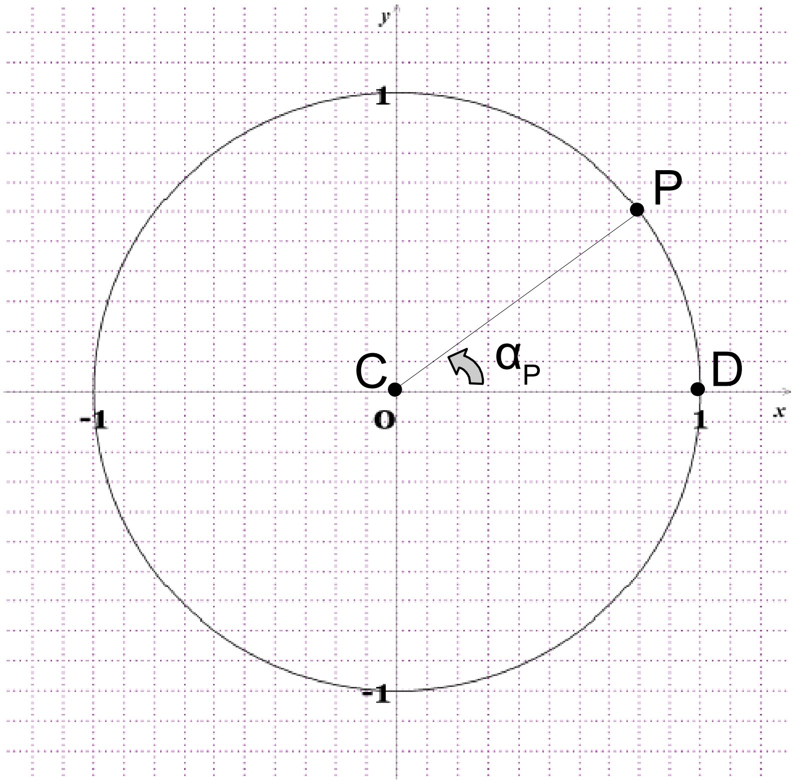
Trigonométrie étendue à tous les triangles

Le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, centré sur un repère orthonormé.



Soient les points :

C = <0 ; 0>
D = <1 ; 0>
P = <x_P ; y_P>

P peut être situé n'importe où sur le cercle.

Notons α_P l'angle qui va de CD à CP dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

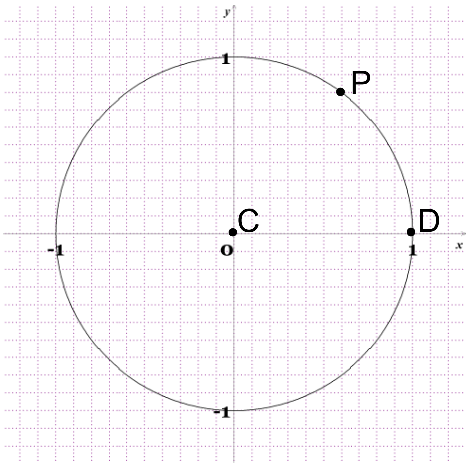
Définissons :

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha_P) &= y_P \\ \cos(\alpha_P) &= x_P \\ \tan(\alpha_P) &= y_P / x_P \end{aligned}}$$

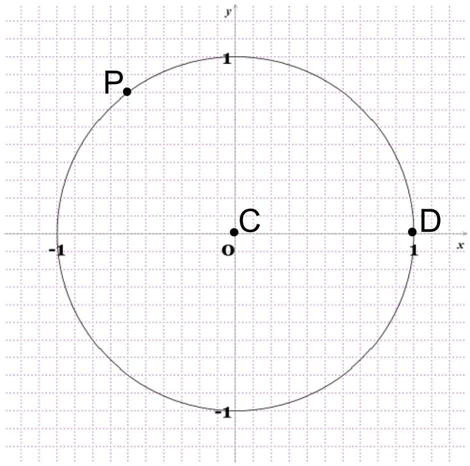
Ces nouvelles définitions généralisent les fonctions trigonométriques à n'importe quel angle compris entre 0° et 360°.

Remarque : la généralisation peut être étendue à des angles supérieurs à 360° (en effectuant plus d'un tour) ou à des angles négatifs (en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre).

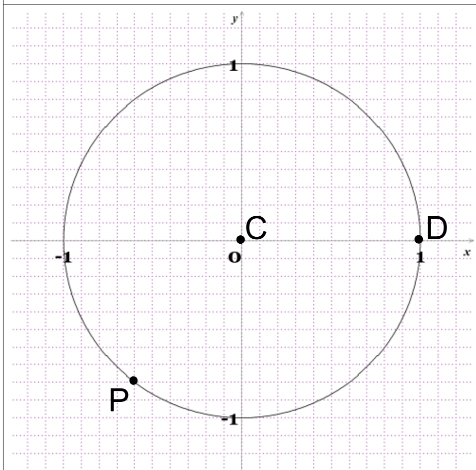
Exemple 1



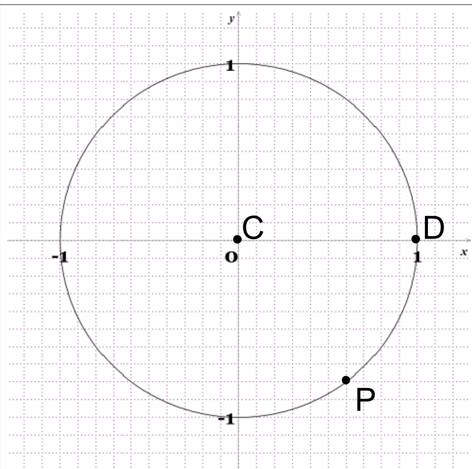
$\sin(\alpha_P) = 0.8$
$\cos(\alpha_P) = 0.6$



$\sin(\alpha_P) = 0.8$
$\cos(\alpha_P) = -0.6$



$\sin(\alpha_P) = -0.8$
$\cos(\alpha_P) = -0.6$



$\sin(\alpha_P) = -0.8$
$\cos(\alpha_P) = 0.6$

Exercice 1

Calculer $\tan(\alpha_P)$ dans chacun des cas du tableau précédent.

Symétries

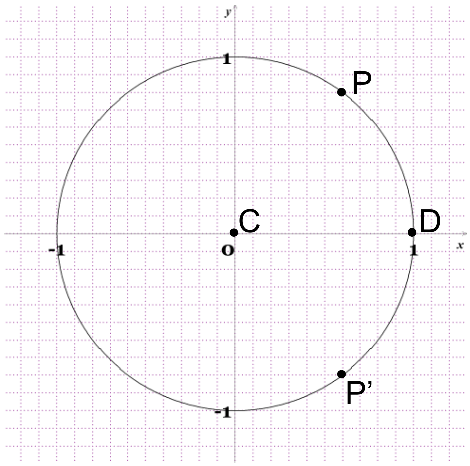
Si P et P' sont symétriques par rapport à l'axe horizontal, alors

$\cos(\alpha_P) = \cos(\alpha_{P'})$

puisque $x_P = x_{P'}$

Relation entre $\alpha_{P'}$ et α_P :

$\alpha_{P'} = 360° - \alpha_P$



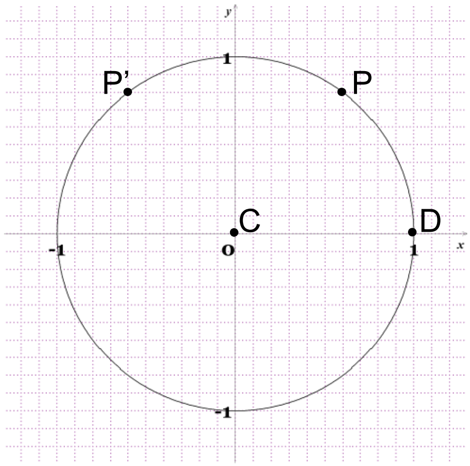
Si P et P' sont symétriques par rapport à l'axe vertical, alors

$\sin(\alpha_P) = \sin(\alpha_{P'})$

puisque $y_P = y_{P'}$

Relation entre $\alpha_{P'}$ et α_P :

$\alpha_{P'} = 180° - \alpha_P$



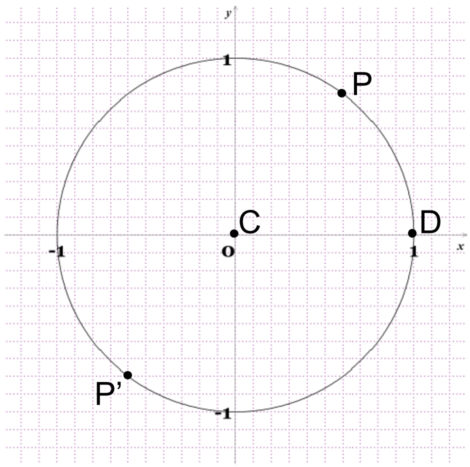
Si P et P' sont symétriques par rapport au centre C, alors

$\tan(\alpha_P) = \tan(\alpha_{P'})$

puisque $x_{P'} = - x_P$
et $y_{P'} = - y_P$

Relation entre $\alpha_{P'}$ et α_P :

$\alpha_{P'} = 180° + \alpha_P$



Conséquences

Soit u positif et ne dépassant pas 1.

L'équation cos(α) = u a pour solutions : $\alpha_1 = \arccos(u)$ et $\alpha_2 = 360° - \alpha_1$

L'équation sin(α) = u a pour solutions : $\alpha_1 = \arcsin(u)$ et $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$

Soit u positif.

L'équation tan(α) = u a pour solutions : $\alpha_1 = \arctan(u)$ et $\alpha_2 = 180° + \alpha_1$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes, en donnant chaque fois les deux solutions comprises entre 0° et 360°, et en plaçant sur le cercle trigonométrique les points qui correspondent à ces angles.

a) cos(α) = 0.4

b) sin(α) = 0.7

c) tan(α) = 2

d) sin(α) = 0.5

*

Remarque

Quand nous travaillons avec des triangles, aucun angle ne peut dépasser 180°.
Donc, parmi les catégories d'équations précédentes, seules celles de la forme :

$$\sin(\alpha) = u$$

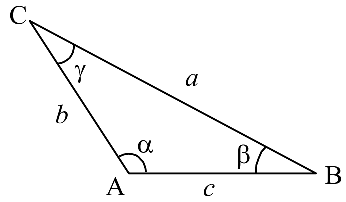
seront susceptibles de fournir deux possibilités pour un angle de triangle.

Loi des sinus

Considérons les angles d'un triangle. Si on divise le sinus de chacun d'eux par le côté qui lui est opposé, on obtient le même résultat.

En formule, cela donne :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\beta)}{b}=\frac{\sin(\gamma)}{c}$$



On trouve facilement sur internet des démonstrations de cette loi.

*

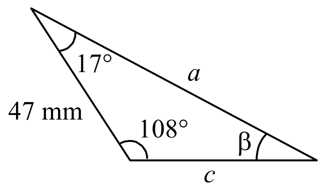
Résoudre un triangle

Résoudre un triangle, c'est déterminer tous ses côtés et tous ses angles à partir des informations connues.

La loi des sinus permet de résoudre un triangle, dans certains cas.

Le cas le plus simple est celui où sont connus deux angles et un côté.

Exemple 2



Puisque la somme des angles dans un triangle vaut toujours 180°, nous pouvons d'abord calculer β.

$$\beta=180°-108°-17°=55°$$

De $\frac{\sin(55°)}{47}=\frac{\sin(108°)}{a}$, nous tirons par produit en croix : $a=\frac{47\cdot\sin(108°)}{\sin(55°)}\approx 54.57\,mm$

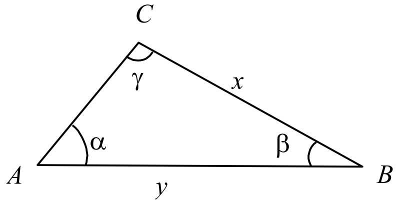
De $\frac{\sin(55°)}{47}=\frac{\sin(17°)}{c}$, nous tirons par produit en croix : $c=\frac{47\cdot\sin(17°)}{\sin(55°)}\approx 16.78\,mm$

Exercice 3

Résoudre les triangles suivants :

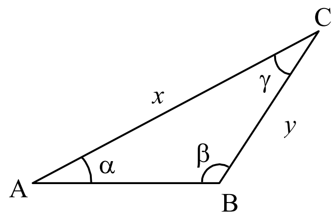
a)

$\overline{AC} = 27$ cm
$\alpha = 45°$
$\gamma = 94°$



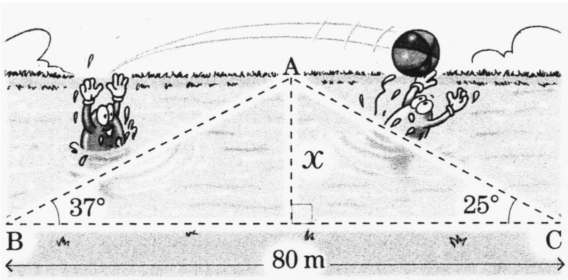
b)

AB = 5.7 cm
$\beta = 100°$
$\gamma = 25°$



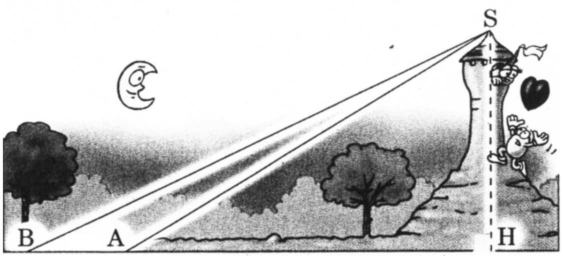
Exercice 4

Calculer la largeur x de la rivière.



Exercice 5

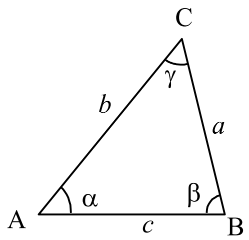
On veut déterminer l'altitude du sommet S de la tour. Pour cela, on vise S d'un point A situé à une distance inconnue du pied de la colline. On effectue une 2^e visée en un point B situé à 50 m de A, les points S, A, B étant dans le même plan vertical.



L'angle en A entre AH et AS vaut 21°
L'angle en B entre BH et BS vaut 17.8°

Calculer la hauteur $\overline{HS}$.

La loi des sinus permet aussi de résoudre un triangle dans le cas où sont connus deux côtés et un angle opposé à l'un d'eux.

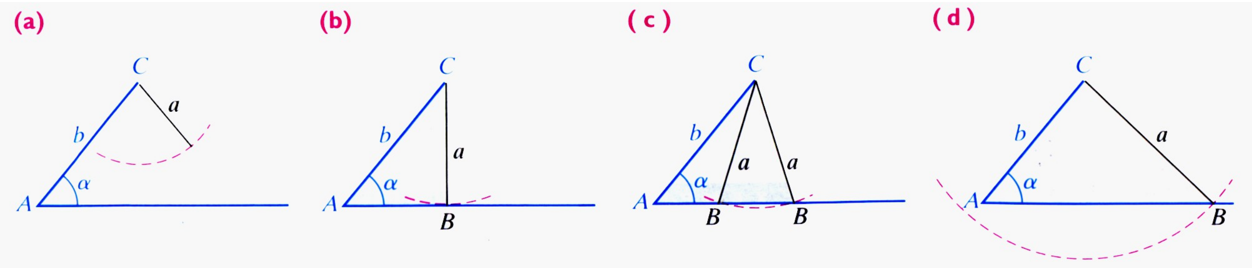


Ce cas est plus complexe.

Supposons que soient connus a, b et α (aigu)

Plaçons α en bas à gauche et prenons b sur le côté oblique AC qui forme avec l'horizontale l'angle α.
Le troisième sommet B doit se situer sur l'horizontale partant de A, sa position dépendant de la longueur a.

Nous avons alors 4 configurations à envisager :



En (a), <u>la longueur a</u> est trop petite : <u>impossible</u> de construire un triangle avec les informations données. Algébriquement, nous pouvons découvrir cette impossibilité quand le calcul donne une équation avec un sinus plus grand que 1.

En (b), <u>la longueur a</u> correspond à un triangle rectangle : la solution est <u>unique</u>.

En (c), <u>la longueur a</u> permet de placer B en deux positions : il y a donc <u>deux triangles</u> possibles.

En (d), <u>la longueur a</u> est suffisamment grande pour ne couper du bon côté qu'une fois l'horizontale partant de A : la solution est <u>unique</u>.

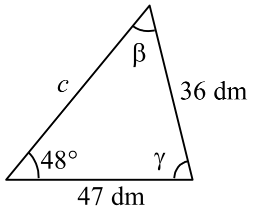
Algébriquement, un bon principe est de toujours chercher les deux solutions potentielles quand on rencontre une équation de la forme :

$$\sin(\beta) = u \qquad \text{(cela peut être un autre angle que } \beta\text{)}$$

Ces candidats sont : $\beta_1 = \arcsin(u)$ et $\beta_2 = 180° - \beta_1$

Si $u > 1$, ce calcul n'est pas possible : nous sommes dans la configuration (a)
Si $u = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 90°$: nous sommes dans la configuration (b)
Si $\beta_1 \neq \beta_2$, nous sommes dans la configuration (c) ou la configuration (d). La 2e solution potentielle devra être éliminée si elle entraîne une valeur négative pour un des angles.

Exemple 3



$$\frac{\sin(48°)}{36}=\frac{\sin(\beta)}{47}$$ livre : $$\sin(\beta)=\frac{47\cdot\sin(48°)}{36}\approx 0.9702$$

d'où $\beta_1\approx\arcsin(0.9702)\approx 75.98°$ $\beta_2=180°-\beta_1\approx 104.02°$

$\gamma=180°-48°-\beta$ livre aussi deux possibilités du fait des deux valeurs de β

$$\gamma_1=180°-48°-\beta_1\approx 180°-48°-75.98°=56.02°$$
$$\gamma_2=180°-48°-\beta_2\approx 180°-48°-104.02°=27.98°$$

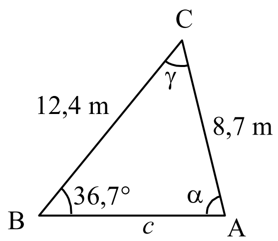
$$\frac{\sin(48°)}{36}=\frac{\sin(\gamma)}{c}$$ livre : $$c=\frac{36\cdot\sin(\gamma)}{\sin(48°)}$$

À nouveau, du fait des deux valeurs de γ, nous avons deux possibilités pour c

$$c_1=\frac{36\cdot\sin(\gamma_1)}{\sin(48°)}\approx\frac{36\cdot\sin(56.02°)}{\sin(48°)}\approx 40.17\,dm$$
$$c_2=\frac{36\cdot\sin(\gamma_2)}{\sin(48°)}\approx\frac{36\cdot\sin(27.98°)}{\sin(48°)}\approx 22.73\,dm$$

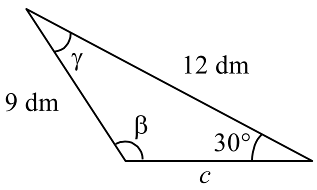
Exercice 6

Résoudre :



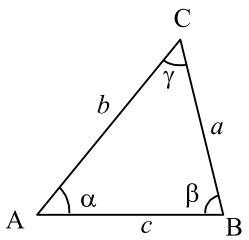
Exercice 7

Résoudre :



Exercice 8

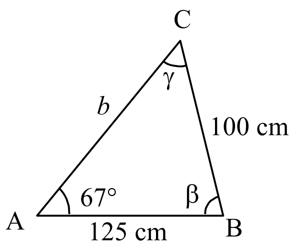
Résoudre :



sachant que
a = 15 mm
b= 10 mm
α = 40°

Exercice 9

Résoudre :



Exercice 10

Un observateur, couché sur le sol, voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km au-dessus de la surface de la Terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur (rayon de la Terre : 6370 km) ?

Loi du cosinus

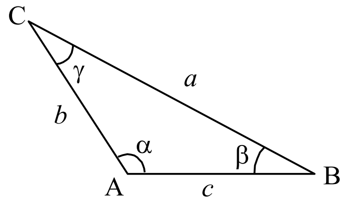
En additionnant les carrés de deux côtés d'un triangle, puis en soustrayant le double produit de ces côtés multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils forment, nous obtenons le carré du 3e côté.

En formules :

$$b^2+c^2-2bc\cdot\cos(\alpha)=a^2$$

$$a^2+c^2-2ac\cdot\cos(\beta)=b^2$$

$$a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\gamma)=c^2$$



Si un des angles vaut 90°, son cosinus est nul et nous obtenons le théorème de Pythagore.

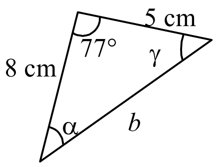
Il est parfois utile d'isoler le cosinus dans ces formules, ce qui nous donne :

$$\cos(\alpha)=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \cos(\beta)=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \qquad \cos(\gamma)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

La loi du cosinus permet de résoudre un triangle, dans deux cas :

quand sont connus deux côtés et l'angle qu'ils forment ;
quand sont connus les trois côtés.

Exemple 4

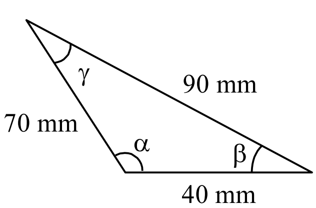


$$5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos(77°)=b^2 \quad\rightarrow\quad 71=b^2 \quad\rightarrow\quad b=\sqrt{71}\approx8.43\,cm$$

$$\cos(\alpha)=\frac{8.43^2+8^2-5^2}{2\cdot8.43\cdot8}\approx0.8159 \quad\rightarrow\quad \alpha\approx\arccos(0.8159)\approx35.32°$$

$$\gamma\approx180°-77°-35.32°\approx67.68°$$

Exemple 5



$$\cos(\alpha)=\frac{70^2+40^2-90^2}{2\cdot70\cdot40}\approx-0.2857$$

$$\alpha\approx\arccos(-0.2857)\approx106.60°$$

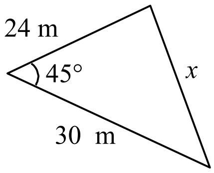
$$\cos(\beta)=\frac{90^2+40^2-70^2}{2\cdot90\cdot40}\approx0.6667 \qquad \beta\approx\arccos(0.6667)\approx48.19°$$

$$\gamma\approx180°-106.60°-48.19°\approx25.21°$$

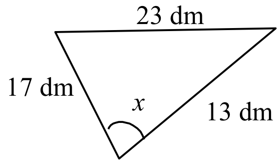
Exercice 11

Calculer x

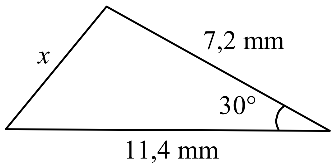
a)



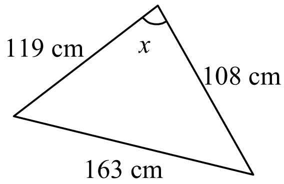
c)



b)



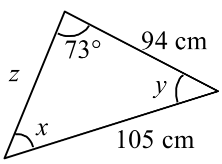
d)



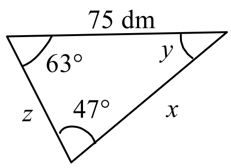
Exercice 12

Résoudre les triangles suivants avec la loi des sinus et/ou la loi du cosinus.

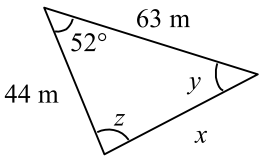
a)



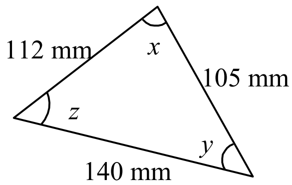
c)



b)



d)

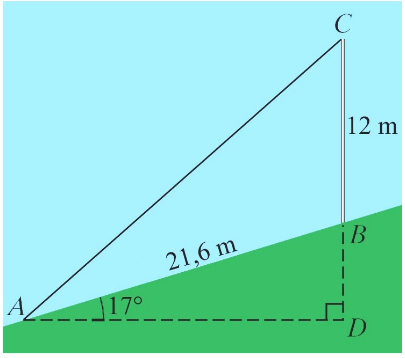


Exercice 13

Deux bateaux partant d’un même point prennent des directions séparées par un angle de 65°. Le premier va à 25 km/h et le second à 30 km/h. À quelle distance seront-ils l’un de l’autre après 3 heures de navigation s’ils ne changent pas de cap ?

Exercice 14

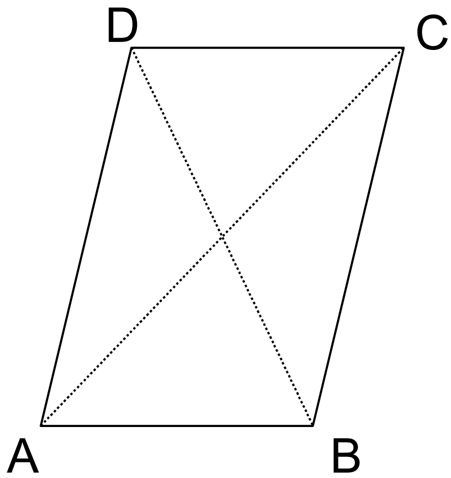
Un poteau haut de 12 m est planté sur le flanc d'une colline qui forme un angle de 17° avec l'horizontale. Calculer la longueur d'un câble tendu entre le sommet du poteau et un point en contrebas distant de 21,6 m de la base du poteau.



Exercice 15

ABCD est un parallélogramme.
L'angle en A entre AB et AD vaut 65°
$\overline{AB} = \overline{DC} = 30$ cm
$\overline{AD} = \overline{BC} = 70$ cm

Calculer la longueur de chaque diagonale.

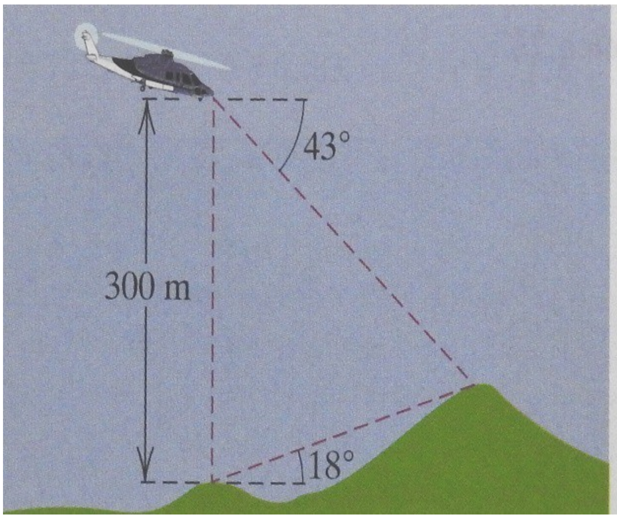


Exercice 16

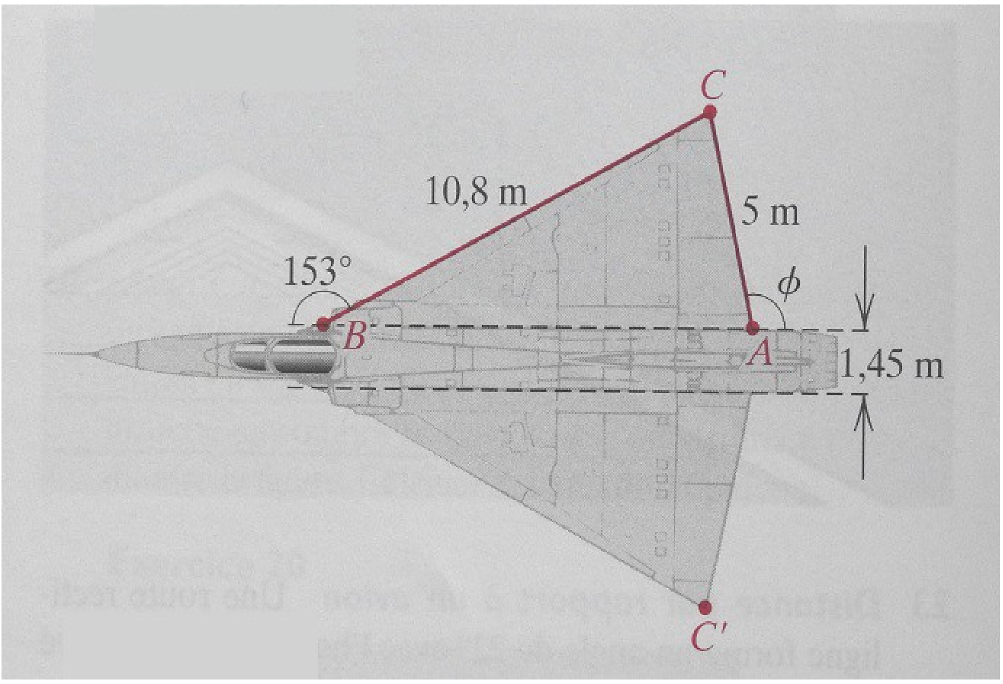
Un hélicoptère est en vol stationnaire à 300 m au-dessus du sommet d'une montagne qui culmine à 1560 m d'altitude. Du sommet de cette montagne, on peut voir un autre pic plus élevé. L'angle d'élévation est de 18°. De l'hélicoptère aussi, on peut voir le pic le plus élevé. L'angle de dépression est de 43°.

a) Calculer la distance séparant les deux sommets.

b) Calculer l'altitude du sommet le plus élevé.



Exercice 17



a) Calculer l'angle Φ.

b) Calculer l'envergure $\overline{CC'}$.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.