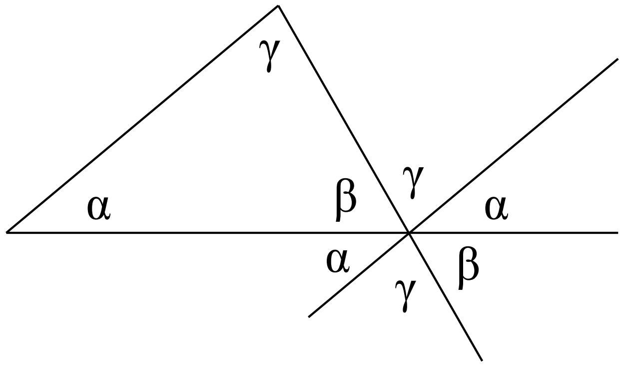
Trigonométrie restreinte aux triangles rectangles

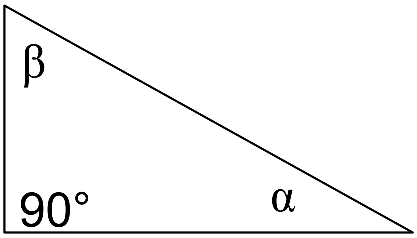
Préliminaires

Un angle plein mesure 360°
Un angle plat mesure 180°
Un angle droit mesure 90°



La somme des angles
dans un triangle vaut 180°

En particulier, dans un triangle rectangle,

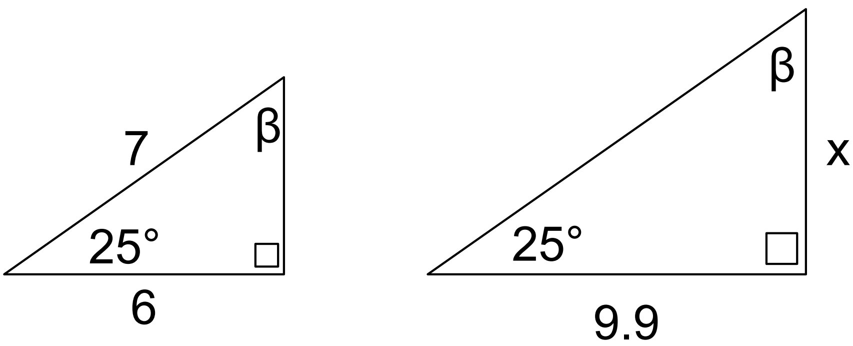


nous avons :

$\alpha + \beta + 90° = 180°$, d'où :
$\alpha + \beta = 90°$, ou encore :
$\beta = 90° - \alpha$

Exercice 1

À l'aide du théorème des triangles semblables et du théorème de Pythagore, calculer β et x.



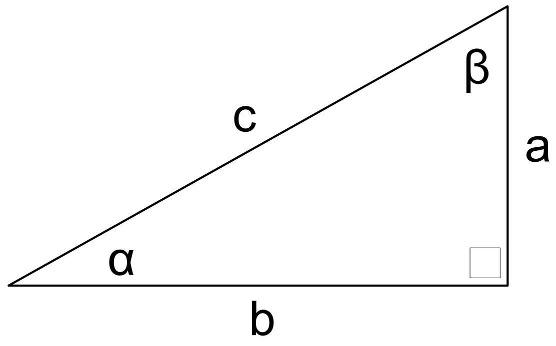
Opposé, adjacent, hypoténuse

Considérons un triangle rectangle.

Le coté **c**, qui ne contribue pas
à former l’angle droit, s’appelle
l’hypoténuse [en abrégé : **hyp**]

Le côté **b**, qui contribue avec le côté c
à former l’angle α, s’appelle
l’adjacent à α [en abrégé : **adj(α)**]

Le côté **a**, qui contribue avec le côté b
à former l’angle droit, s’appelle
l’opposé à α [en abrégé : **opp(α)**],
parce qu’il est situé à l’opposé de α.



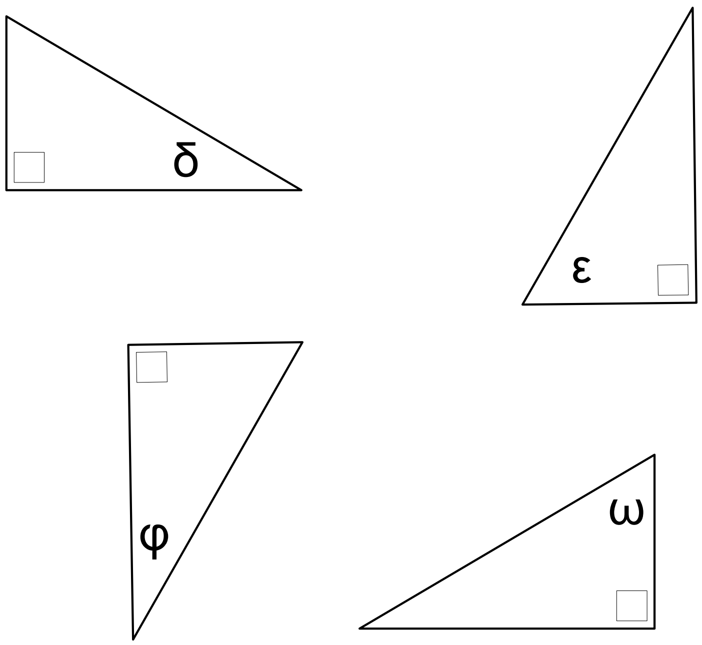
En résumé :	a = opp(α)	b = adj(α)	c = hyp

Mais, relativement à β, nous pouvons aussi dire que :

a = adj(β)	b = opp(β)	c = hyp

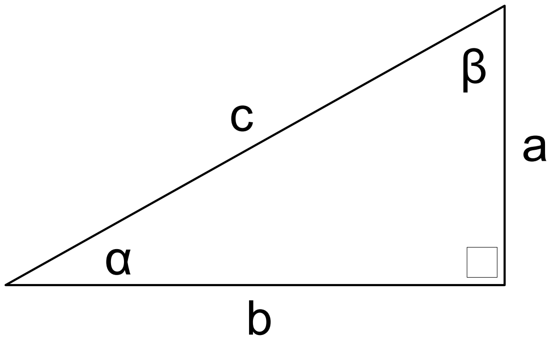
Exercice 2

Sur chacun des schémas suivants, indiquer l’hypoténuse, l’adjacent à l’angle noté et l’opposé à ce même angle.



Sinus, cosinus et tangente

Considérons un triangle rectangle.



Le sinus de α, noté **sin(α)**, est
le rapport **opp(α) / hyp**
(autrement dit : a / c)

Le cosinus de α, noté **cos(α)**, est
le rapport **adj(α) / hyp**
(autrement dit : b / c)

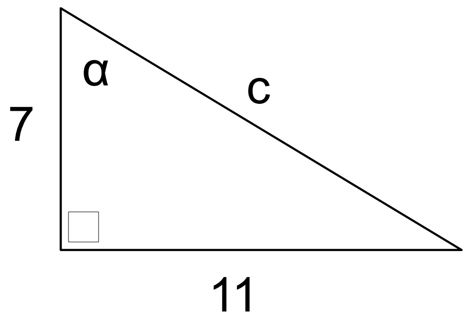
La tangente de α, notée **tan(α)**, est
le rapport **opp(α) / adj(α)**
(autrement dit : a / b)

Mais, relativement à β, nous pouvons aussi dire :

sin(β) = opp(β) / hyp = b / c = cos(α)
cos(β) = adj(β) / hyp = a / c = sin(α)
tan(β) = opp(β) / adj(β) = b / a = 1 / tan(α)

Le théorème des triangles semblables nous permet d'affirmer que les sinus, cosinus et tangentes ne dépendent que des angles, puisque des triangles plus grands ou plus petits ont les mêmes rapports de côtés.

Exemple 1



Dans ce triangle, nous avons :

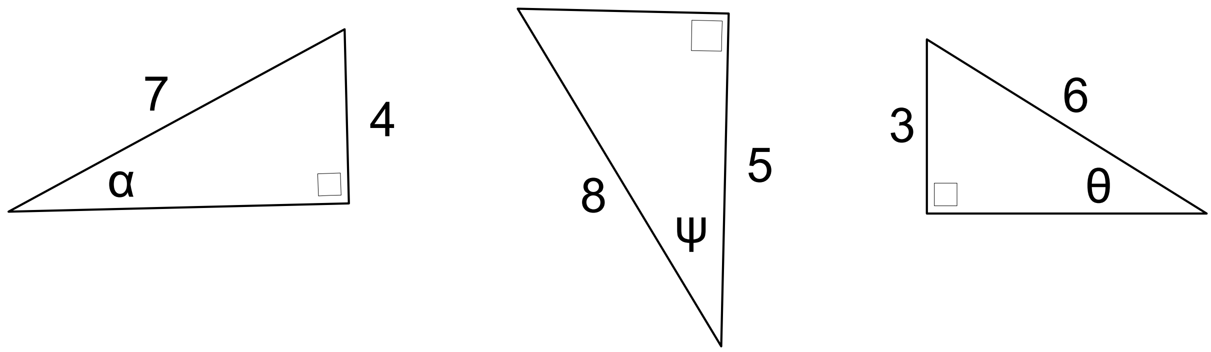
adj(α) = 7
opp(α) = 11
hyp = c = $\sqrt{7^2+11^2}=\sqrt{170}\approx 13.0384$

et donc :

$$\sin(\alpha)\approx\frac{11}{13.0384}\approx 0.8437$$
$$\cos(\alpha)\approx\frac{7}{13.0384}\approx 0.5369$$
$$\tan(\alpha)=\frac{11}{7}\approx 1.5714$$

Exercice 3

Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle indiqué sur chaque schéma.



*

Comment déterminer le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle donné ?

Il y a des cas particuliers où une construction géométrique permet d'obtenir la réponse.

Exemple 2

Considérons un triangle équilatéral de côté 1, découpé en deux moitiés.

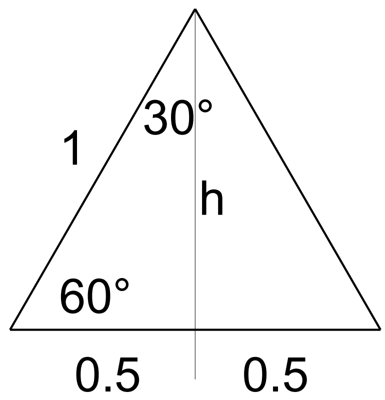
Le théorème de Pythagore donne :

$h^2+0.5^2=1^2$, d'où $h=\sqrt{0.75}$

Nous obtenons alors :

$$\sin(60°)=\frac{h}{1}=\sqrt{0.75}\approx 0.8660$$
$$\cos(60°)=\frac{0.5}{1}=0.5000$$
$$\tan(60°)=\frac{h}{0.5}=\frac{\sqrt{0.75}}{0.5}\approx 1.7321$$

$$\sin(30°)=\cos(60°)=0.5000$$
$$\cos(30°)=\sin(60°)\approx 0.8660$$
$$\tan(30°)=\frac{1}{\tan(60°)}\approx 0.5774$$

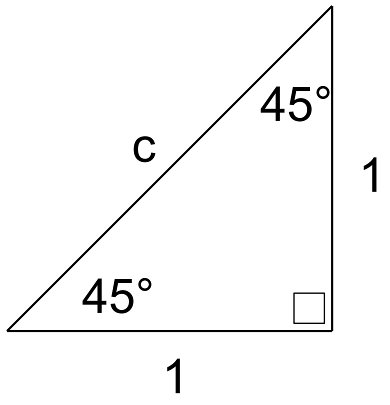


Exercice 4

Considérons un triangle rectangle isocèle, dont les côtés formant l’angle droit mesurent chacun 1.

Calculer d’abord c,

puis calculer sin(45°), cos(45°) et tan(45°).



*

En général, le calcul d’un sinus, d’un cosinus ou d’une tangente s’effectue au moyen d’algorithmes assez compliqués. Nous utiliserons une machine électronique pour évacuer ce problème et nous écrirons les résultats avec au moins 4 décimales.

Exemple 3

$$\sin(35°) \approx 0.5736$$
$$\cos(42°) \approx 0.7431$$
$$\tan(78°) \approx 4.7046$$

Attention : comme il existe plusieurs unités d’angles, il faut mettre sa calculatrice en mode **DEGRÉ**.

Exercice 5

Compléter en utilisant la calculatrice :

sin(10°) =

sin(22.5°) =

cos(57°) =

cos(0.5°) =

tan(20°) =

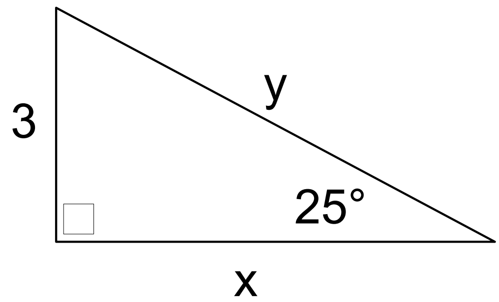
tan(89.99°) =

Déterminer des côtés inconnus d'un triangle rectangle

Soit un triangle rectangle dont les angles sont connus et dont un côté est connu.
Nous pouvons alors calculer les autres côtés.

Exemple 4

Nous pouvons poser l'équation :



$$\tan(25°)=\frac{opp(25°)}{adj(25°)}=\frac{3}{x}$$

Le produit en croix donne :

$x \cdot \tan(25°)=3$, d'où :

$$x=\frac{3}{\tan(25°)}\approx 6.43$$

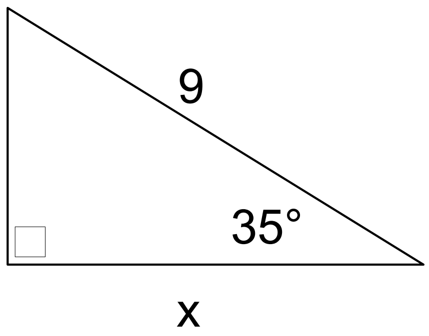
Ensuite y peut être calculé à l'aide du sinus de 25° ou du théorème de Pythagore :

$$y=\sqrt{3^2+x^2}\approx 7.10$$

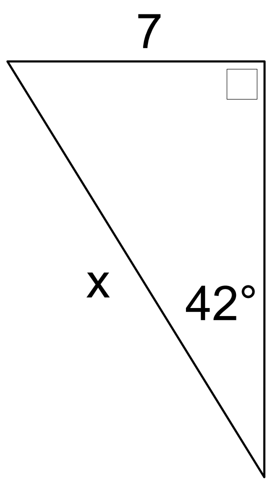
Exercice 6

Déterminer les côtés indiqués dans les triangles suivants :

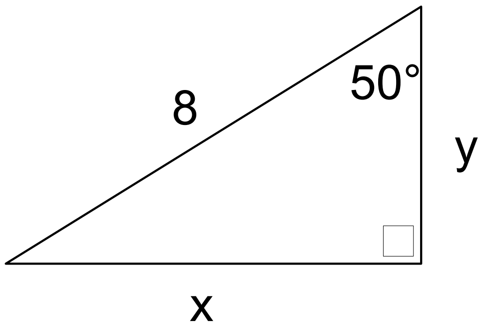
a)



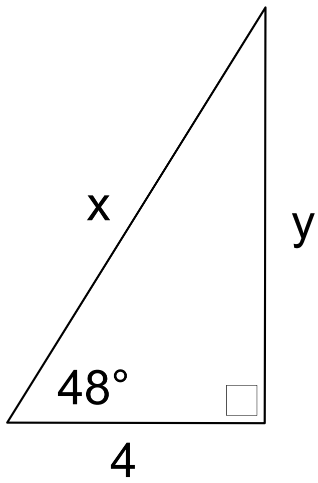
b)



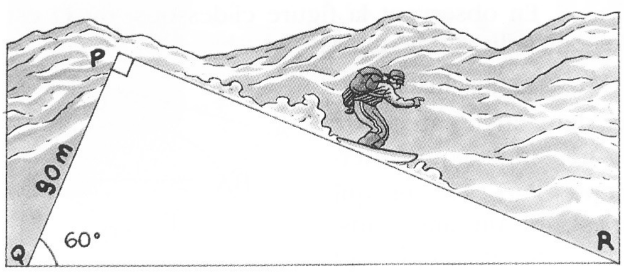
c)



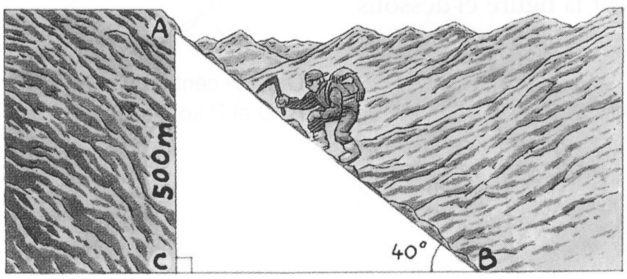
d)



Exercice 7



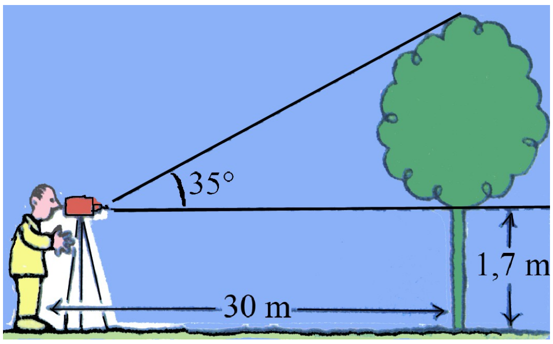
Calculer $\overline{PR}$



Calculer $\overline{BA}$

Exercice 8

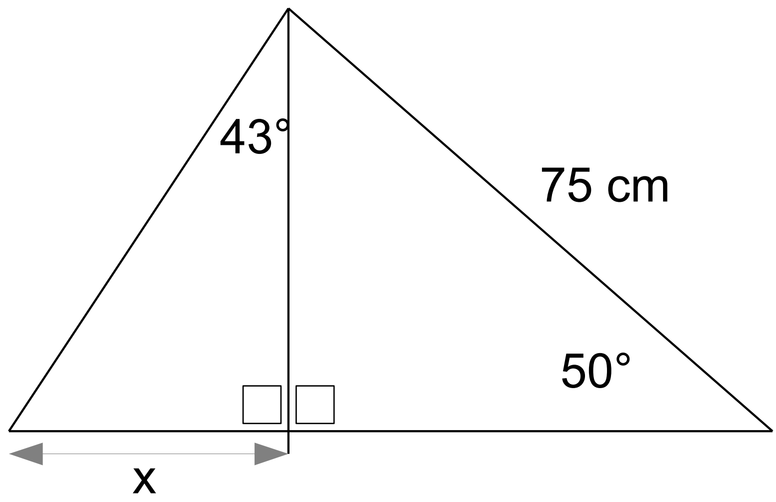
Avec un théodolite,
appareil utilisé par les géomètres
pour mesurer des angles,
on obtient les mesures suivantes.



Quelle est la hauteur de cet arbre ?

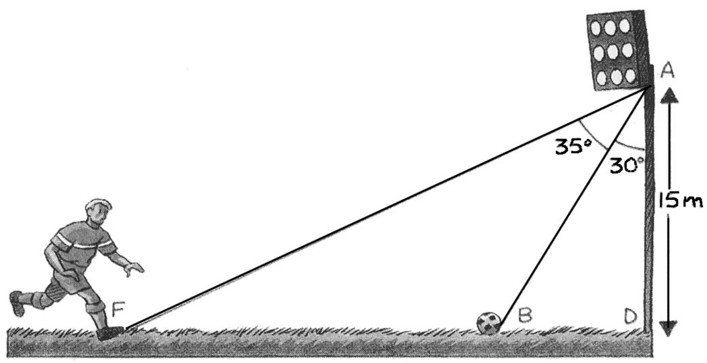
Exercice 9

Calculer x



Exercice 10

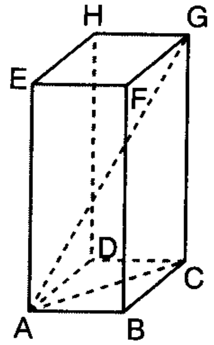
Calculer la distance $\overline{FB}$ entre le footballeur et le ballon.



Exercice 11

Calculer le volume de ce pavé, sachant que :

l'angle en A entre AC et AG vaut 57°,
$\overline{AG}$ = 10 cm et $\overline{AB}$ = 3 cm.



Arc sinus, arc cosinus et arc tangente

L'arc sinus d'un nombre u, noté **arcsin(u)**, est **l'angle dont le sinus vaut u**.
L'arc cosinus d'un nombre u, noté **arccos(u)**, est **l'angle dont le cosinus vaut u**.
L'arc tangente d'un nombre u, noté **arctan(u)**, est **l'angle dont la tangente vaut u**.

Pour l'arc sinus et l'arc cosinus, le nombre u ne peut pas dépasser 1.

Exemple 5

Nous avons vu dans l'exemple 2 que :

$$\sin(60°)=0.8660$$
$$\cos(60°)=0.5000$$
$$\tan(60°)=1.7321$$

Il s'ensuit :

$$\arcsin(0.8660)=60°$$
$$\arccos(0.5000)=60°$$
$$\arctan(1.7321)=60°$$

*

Sur les machines électroniques, il est fréquent d'avoir les notations suivantes :

$\sin^{-1}$ pour arcsin
$\cos^{-1}$ pour arccos
$\tan^{-1}$ pour arctan

Exemple 6

$\arcsin(0.2) = \sin^{-1}(0.2) = 11.54°$
$\arccos(0.2) = \cos^{-1}(0.2) = 78.46°$
$\arctan(0.34) = \tan^{-1}(0.34) = 18.78°$

*

Déterminer des angles inconnus d'un triangle rectangle

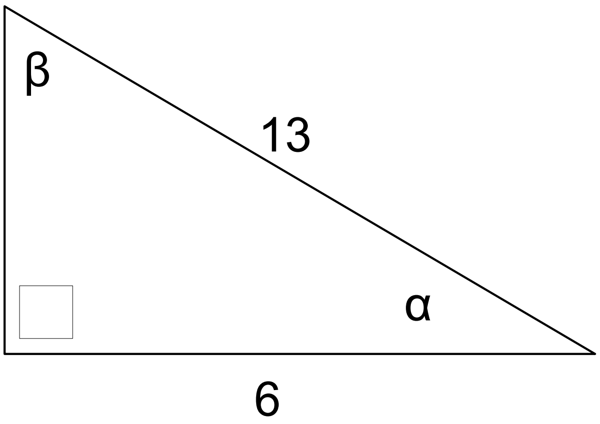
Soit un triangle rectangle dont deux côtés sont connus.
Nous pouvons alors calculer les angles.

Exemple 7

Nous avons :

$\cos(\alpha)=\frac{6}{13}$ et donc :

$\alpha=\arccos(\frac{6}{13})\approx 62.51\,°$



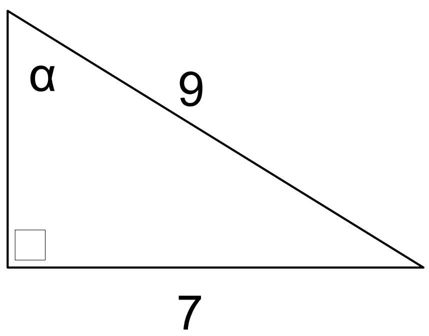
Ensuite, β peut être calculé ainsi :

$\beta=90\,°-\alpha\approx 27.49\,°$

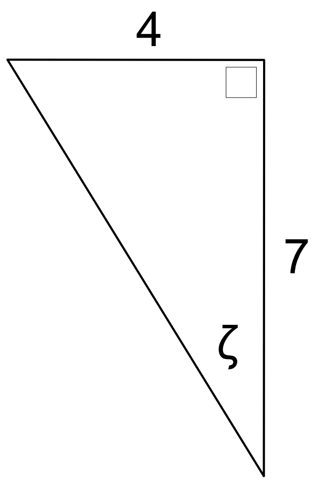
Exercice 12

Déterminer les angles indiqués dans les triangles suivants :

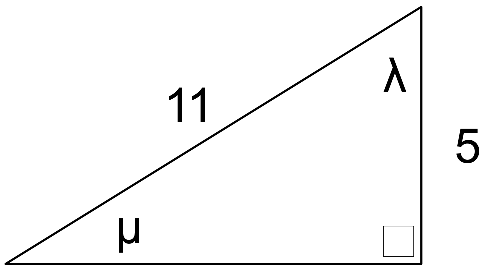
a)



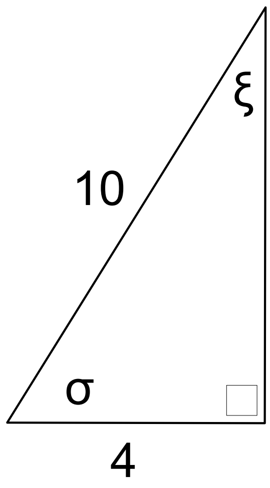
b)



c)

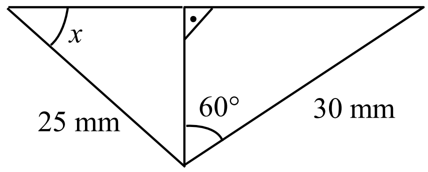


d)



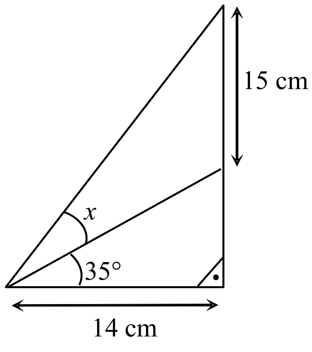
Exercice 13

Calculer l'angle x



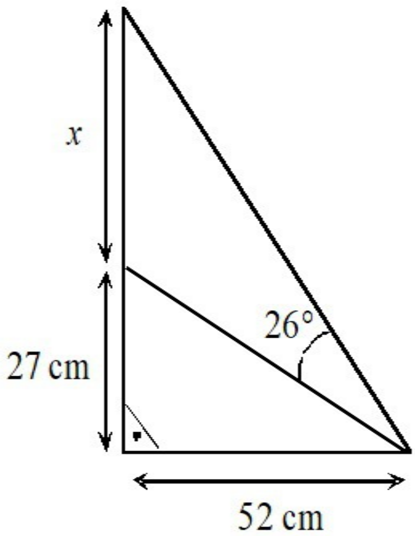
Exercice 14

Calculer l'angle x



Exercice 15

Calculer la longueur x



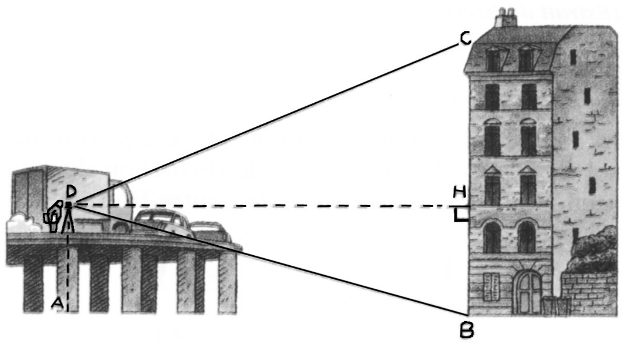
Exercice 16

À l'aide d'un instrument, un géomètre mesure l'angle en D entre DB et DC. Il trouve 37°

Sachant que :

$\overline{AB} = \overline{DH} = 50$ m
$\overline{AD} = \overline{BH} = 6$ m

calculer la hauteur de l'immeuble.



Exercice 17

Calculer le périmètre d'un pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle dont le rayon mesure 12 cm.