

Volume du tétraèdre en fonction de ses côtés

PASCAL KAESER

Genève

e-mail : pascal.kaeser@edu.ge.ch

mai 1999

1 Méthode

Si l'on considère le tétraèdre de sommets : $(0; 0; 0)$, $(a; 0; 0)$, $(b; c; 0)$, $(d; e; f)$, son volume est naturellement égal à $|\frac{acf}{6}|$. Grâce au théorème de Pythagore, les longueurs des 6 arêtes peuvent aisément s'exprimer en fonction des 6 variables : a, b, c, d, e, f . Il ne reste alors plus qu'à résoudre un système (non linéaire) de 6 équations à 6 inconnues. J'ai utilisé le logiciel Maple pour effectuer cette résolution et j'ai cherché à la main une manière élégante de simplifier la formule qui s'ensuit pour le volume du tétraèdre.

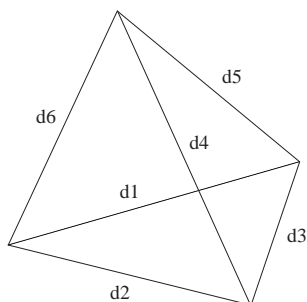
2 Formule

Soient A l'ensemble des 6 arêtes du tétraèdre et $P(A)$ l'ensemble des parties de A . Notons \bar{t} le complément par rapport à A d'un élément t de $P(A)$. Définissons F comme l'ensemble des triples $\{x; y; z\} \in P(A)$, tels que x, y, z forment une face du tétraèdre. Définissons en outre G comme l'ensemble des $(e \cap f) \cup (\bar{e} \cup \bar{f}) \in P(A)$, tels que $e, f \in F$ et $e \neq f$. G contient 3 éléments qui sont les paires d'arêtes opposées du tétraèdre, c-à-d les arêtes sans sommet commun. Nous avons encore besoin de 3 fonctions. La première, D , associe à une arête x de longueur L la quantité : $(\frac{L}{\sqrt[3]{12}})^2$. La seconde, p , associe à un élément $t \in P(A)$ le produit des $D(x)$ pour tous les $x \in t$. La troisième, s , analogue à la seconde, associe à t la somme des $D(x)$ pour tous les $x \in t$. Alors le volume du tétraèdre est donné par la formule :

$$\sqrt{\sum_{t \in G} (s(\bar{t}) - s(t))p(t) - \sum_{t \in F} p(t)}$$

3 Compléments

Si l'on numérote les arêtes du tétraèdre, comme sur le dessin ci-dessous, les ensembles F et G sont les suivants :



$$F = \{\{d1; d2; d3\}; \{d3; d4; d5\}; \{d5; d6; d1\}; \{d2; d4; d6\}\}$$

$$G = \{\{d1; d4\}; \{d2; d5\}; \{d3; d6\}\}$$

Remarquons que F est un $1 - (6, 3, 2)$ design et G un $1 - (6, 2, 1)$ design (G est aussi une partition de A). En outre, il est possible de représenter sur un même graphe F et G , d'une manière très proche du fameux plan projectif de Fano, à la différence qu'il manque un point.

